問題解答

第 1 章

問 1.1 から
問 1.4　略.

問 1.5　127, 125.3, 122.2, 119, 114.8, 111.7, 110　箱ひげ図は略

問 1.6

$$
\begin{aligned}
s^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-2x_i\bar{x}+\bar{x}^2) \\
&= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\bar{x}\sum_{i=1}^{n}x_i+\bar{x}^2\sum_{i=1}^{n}1\right) \\
&= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\bar{x}n\bar{x}+n\bar{x}^2\right) \\
&= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2\right)
\end{aligned}
$$

問 1.7

$$
\begin{aligned}
s_{xy} &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}) \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_iy_i-x_i\bar{y}-\bar{x}y_i+\bar{x}\bar{y}) \\
&= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\bar{y}\sum_{i=1}^{n}x_i-\bar{x}\sum_{i=1}^{n}y_i+\bar{x}\bar{y}\sum_{i=1}^{n}1\right) \\
&= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{y}\bar{x}-n\bar{x}\bar{y}+n\bar{x}\bar{y}\right) \\
&= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}\right)
\end{aligned}
$$

問 1.8

$$
\begin{aligned}
2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j^2\right) &= 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 b_i^2\right) + 2\left(\sum\sum_{i \neq j} a_i^2 b_j^2\right), \\
2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 &= 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 b_i^2\right) + 2\left(\sum\sum_{i \neq j} a_i b_i a_j b_j\right)
\end{aligned}
$$

より，最初の等号が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
& 2\left(\sum\sum_{i \neq j} a_i^2 b_j^2\right) - 2\left(\sum\sum_{i \neq j} a_i b_i a_j b_j\right) \\
&= \left(\sum\sum_{i \neq j} a_i^2 b_j^2\right) - 2\left(\sum\sum_{i \neq j} a_i b_i a_j b_j\right) + \left(\sum\sum_{i \neq j} a_i^2 b_j^2\right) \\
&= \left(\sum\sum_{i \neq j} a_i^2 b_j^2\right) - 2\left(\sum\sum_{i \neq j} a_i b_i a_j b_j\right) + \left(\sum\sum_{i \neq j} a_j^2 b_i^2\right) \\
&= \sum\sum_{i \neq j} \left(a_i^2 b_j^2 - 2a_i b_i a_j b_j + a_j^2 b_i^2\right) \\
&= \sum\sum_{i \neq j} (a_i b_j - a_j b_i)^2
\end{aligned}
$$

より，2 番目の等号が成り立つ．

第 2 章

問 2.1　(1) $\{2,3,4,5,6\}$, $\{4\}$, $\{1,3,5\}$, $\{2,6\}$

(2)　略.

問 2.2　(1) Ω, $(0,\ 1]$, $(1,\ \infty)$, $(-\infty,\ 0]$

(2)　略.

問 2.3　(A6) の $A \cap B = A$ を示す.

$A \cap B \subset A$ は自明であるので，$A \subset A \cap B$ を示す.

$\omega \in A$ とすると，$\omega \in A \subset B$ より，$\omega \in B$ である．ここで，$\omega \in A \cap B$ である.

問 2.4　略.

問 2.5　略.

問 2.6　略.

問 2.7　(1)　$P((0.1, 0.5] \cup (0.3, 0.7]) = P((0.1, 0.7]) = 0.7 - 0.1 = 0.6$

(2)　$P((0.3, 0.5]) = 0.5 - 0.3 = 0.2$

(3)　定理 2.3 の (D2) を，$k = 2$ として適用して，

$$P((0.1, 0.5] \cup (0.6, 0.7]) = P((0.1, 0.5]) + P((0.6, 0.7]) = 0.4 + 0.1 = 0.5$$

問 2.8　$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$ である.

(1) 定理 2.3 の (D5) を適用して

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty}\{1 - 1/(2n)\} = 1$$

(2)　$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(A_1\right) = 1/2$

(3)　(1), 定理 2.3 の (D1), 命題 2.1 の (3) より，

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) = 1 - P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1 - 1 = 0$$

問 2.9　定理 2.3 の (D4) を使って答えを得ることが出来る．(1) 0.9 (2) 0.2

問 2.10　命題 2.5 の (2) から (4) と全く同じ．証明略.

問 2.11　(C3)' のみを示す．$B_n \equiv A_n \cap C$ とおく．このとき，$B_\ell \cap B_m = \emptyset\ (\ell \neq m)$ である．命題 2.1(1) と定義 2.2 の (C3) より，

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \middle| C\right) &= P\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \bigcap C\right) / P(C) \\
&= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap C)\right) / P(C) \\
&= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) / P(C) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) / P(C) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n | C)
\end{aligned}$$

問 2.12　例はいくらでもある．例 2.6 を参照し考察せよ．

問 2.13　(1)

$$\begin{aligned}
X(A) &= \{X(\omega) |\ 1 < \omega < 2\} \\
&= \{\omega^3 |\ 1 < \omega < 2\} \\
&= \{\omega^3 |\ 1 < \omega^3 < 8\} \\
&= (1,\ 8)
\end{aligned}$$

同様に，$X(B) = (-1,\ 27)$, $X(\Omega) = R$ である．

(2)

$$\begin{aligned} X^{-1}(E) &= \{\omega|\ X(\omega) \in (-1,\ 125]\} \\ &= \{\omega|\ -1 < X(\omega) \leqq 125\} \\ &= \{\omega|\ (-1)^3 < \omega^3 \leqq 5^3\} \\ &= \{\omega|\ -1 < \omega \leqq 5\} \\ &= (-1,\ 5] \end{aligned}$$

$X^{-1}(F) = (-\infty,\ -2]$, $X^{-1}(R) = R$

問 2.14　$X(A) = (1,\ 2)$,

$$\begin{aligned} X(B) &= \{X(\omega)|\ -6 < \omega < 5\} \\ &= \{|\omega||\ -6 < \omega < 5\} \\ &= \{|\omega||\ 0 \leqq |\omega| < 6\} \\ &= [0,\ 6) \end{aligned}$$

$X(\Omega) = [0,\ \infty)$

(2)

$$\begin{aligned} X^{-1}(E) &= \{\omega|\ X(\omega) \in (-\infty,\ -1]\} \\ &= \{\omega|\ X(\omega) \leqq -1\} \\ &= \{\omega|\ |\omega| \leqq -1\} \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X^{-1}(F) &= \{\omega|\ X(\omega) \in (-\infty,\ 2]\} \\ &= \{\omega|\ X(\omega) \leqq 2\} \\ &= \{\omega|\ |\omega| \leqq 2\} \\ &= \{\omega|\ -2 \leqq \omega \leqq 2\} \\ &= [-2,\ 2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X^{-1}(G) &= \{\omega|\ X(\omega) \in (1,\ 2)\} \\ &= \{\omega|\ 1 < |\omega| < 2\} \\ &= \{\omega|\ -2 < \omega < -1 \text{ または } 1 < \omega < 2\} \\ &= (-2,\ -1) \cup (1,\ 2) \end{aligned}$$

$X^{-1}(R) = R$

問 2.15　(1) $X(A) = A,\ X(B) = B,\ X(\Omega) = \Omega$

(2)

$$\begin{aligned} X^{-1}(E) &= \{\omega |\ X(\omega) \in (-5,\ 2)\} \\ &= \{\omega |\ -5 < X(\omega) < 2\} \\ &= \{\omega |\ -5 < |\omega| < 2\} \\ &= \{\omega |\ 0 \leqq |\omega| < 2\} \\ &= \{\omega |\ 0 \leqq \omega < 2\} \\ &= [0,\ 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X^{-1}(F) &= \{\omega |\ X(\omega) \in (-\infty,\ 2]\} \\ &= \{\omega |\ X(\omega) \leqq 2\} \\ &= \{\omega |\ 0 \leqq |\omega| \leqq 2\} \\ &= \{\omega |\ 0 \leqq \omega \leqq 2\} \\ &= [0,\ 2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X^{-1}(G) &= \{\omega |\ X(\omega) \in (1,\ 2)\} \\ &= \{\omega |\ 1 < |\omega| < 2\} \\ &= \{\omega |\ 1 < \omega < 2\} \\ &= (1,\ 2) \end{aligned}$$

$X^{-1}(R) = \Omega$

問 2.16　(1)

$$\begin{aligned} X(A) &= \{X(\omega) |\ \omega \in \{1,3,5\}\} \\ &= \{X(\omega) |\ \omega = 1,3,5\} \\ &= \{X(1), X(3), X(5)\} \\ &= \{1,1,1\} \\ &= \{1\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
X(B) &= \{X(\omega)|\ \omega \in \{2,6\}\} \\
&= \{X(\omega)|\ \omega = 2,6\} \\
&= \{X(2), X(6)\} \\
&= \{0,0\} \\
&= \{0\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X(C) &= \{X(\omega)|\ \omega \in \{2,3,5\}\} \\
&= \{X(2), X(3), X(5)\} \\
&= \{0,1,1\} \\
&= \{0,1\}
\end{aligned}
$$

$X(\Omega) = \{0,1\}$

(2)

$$
\begin{aligned}
X^{-1}(E) &= \{\omega|\ X(\omega) = 0\} \\
&= \{2,4,6\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X^{-1}(F) &= \{\omega|\ X(\omega) \leqq 0.3\} \\
&= \{\omega|\ X(\omega) = 0\} \\
&= \{2,4,6\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X^{-1}(G) &= \{\omega|\ X(\omega) \leqq 2\} \\
&= \{\omega|\ X(\omega) = 0,1\} \\
&= \Omega
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X^{-1}(H) &= \{\omega|\ 0 < X(\omega) \leqq 2\} \\
&= \{\omega|\ X(\omega) = 1\} \\
&= \{1,3,5\}
\end{aligned}
$$

$X^{-1}(R) = \Omega$

問 2.17　$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$ である．

(1) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$

(2) $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 = (0,\ 1]$

(3) 命題 2.1(3) より，

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \Omega^c = \emptyset$$

(4) 命題 2.1(4) より，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = A_1^c = (1,\ \infty)$$

問 2.18　系 2.13 と同じ証明.

問 2.19　$[x]$ は x を超えない最大の整数とする.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & (x < 1) \\ \frac{[x]}{6} & (1 \leqq x < 6) \\ 1 & (6 \leqq x) \end{cases}$$

問 2.20　$f_X(x) = 1/(b-a)$　($a \leqq x < b$ のとき)

問 2.21　$P(0 \leqq X \leqq 2) = \frac{1}{2}\int_0^2 e^{-x}dx = \frac{1}{2}(1 - e^{-2})$.

$E(X) = 0$, $V(X) = \int_0^{\infty} x^2 e^{-x}dx = 2$

問 2.22　(1) $f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$

(2)

$$f_X(-x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x e^{-2x}}{(1+e^x)^2 e^{-2x}} = f_X(x)$$

より，$xf_X(x)$ は奇関数であるので $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x) = 0$

(3) $P(-1 \leqq X \leqq 1) = 2\int_0^1 f_X(x)dx = 2F_X(1) - 1 = \frac{2}{1+e^{-1}} - 1$

(4) $F_Y(x) = P(Y \leqq x) = P(X \leqq x-1) = \frac{1}{1+e^{-x+1}}$

$f_Y(x) = \frac{e^{-x+1}}{(1+e^{-x+1})^2}$

$t = x - 1$ と変数変換して，

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} xf_Y(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} (t+1)f_X(t)dt = 1$$

(5) $F_Z(x) = P(Z \leqq x) = P(X \leqq x+1) = \frac{1}{1+e^{-x-1}}$

$f_Z(x) = \frac{e^{-x-1}}{(1+e^{-x-1})^2}$

$t = x+1$ と変数変換して，

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_Z(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (t-1) f_X(t) dt = -1$$

問 2.23　(1)

$$P(2 \leqq X \leqq n) = \sum_{i=2}^{n} P(X=i) = \frac{n-1}{n}$$

$$P(2 < X \leqq n) = \sum_{i=3}^{n} P(X=i) = \frac{n-2}{n}$$

(2) $E(X) = \sum_{i=1}^{n} i f_X(i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n+1}{2}$

$$\begin{aligned} V(X) &= E\left\{\left(X - \frac{n+1}{2}\right)^2\right\} \\ &= E(X^2) - \frac{(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{(n+1)(n-1)}{12} \end{aligned}$$

問 2.24　$E(X) = \sum_{i=1}^{5} i f_X(i) = \sum_{i=1}^{5} i P(X=i) = 3$

$V(X) = \sum_{i=1}^{5} (i-3)^2 f_X(i) = \frac{4}{3}$

問 2.25　(1) $P(X \geqq 0) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$　(2) $F_X(x) = 1 - e^{-x}$, $F_X(t_\alpha) = \alpha$ より，

$$1 - e^{-t_\alpha} = \alpha \iff t_\alpha = -log(1-\alpha)$$

(3) $E(X) = \int_0^{\infty} x e^{-x} dx = 1.$

$E(X^2) = \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx = 2$ と定理 2.19(1) より $V(X) = 1$

(4) 命題 2.16(2) より，$E(Y) = aE(X) + b = a + b$. (3) と定理 2.19(2) より，$V(Y) = a^2$.

問 2.26　(1) $E(X)=0$　$V(X)=2$

(2) $E(Y)=0$　$V(Y)=2$

(3) $\mathrm{Corr}(X,Y)=0$

問 2.27　(1) $E(X)=\mu_1$　$V(X)=\sigma_1^2$

(2) $E(Y)=\mu_2$　$V(Y)=\sigma_2^2$

(3) $\mathrm{Corr}(X,Y)=\rho$

問 2.28　(1) $f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-y^2}$

(2)

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(x-y)^2}$$

(3) 0　(4) 1/2　(5) y

問 2.29　(1) $F_{X_i}(x)=F\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$.

(2.15) より

$$F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})=F_{X_1}(x_1)\cdots F_{X_n}(x_n)=\prod_{i=1}^n F\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)$$

(2)　$f_{X_i}(x)=\frac{d}{dx}F_{X_i}(x)=\frac{d}{dx}F\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sigma}f\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$.

定義 2.20 より，

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})=f_{X_1}(x_1)\cdots f_{X_n}(x_n)=\frac{1}{\sigma^n}\prod_{i=1}^n f\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right).$$

問 2.30　(1) $xf(x)$ は奇関数であるので $E(X_1)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)=0$

$E(X_1+X_2+X_3)=E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)=3E(X_1)=0$

(2) $E(X_1X_2X_3+X_1^2X_2^2X_3^2+X_1^3X_2^3X_3^3)$

$=E(X_1X_2X_3)+E(X_1^2X_2^2X_3^2)+E(X_1^3X_2^3X_3^3)$

補題 2.25(3) より，

(与式)$=E(X_1)E(X_2)E(X_3)+E(X_1^2)E(X_2^2)E(X_3^2)+E(X_1^3)E(X_2^3)E(X_3^3)$

$x^3f(x)$ も奇関数であるので，

(与式)$=0+1+0=1$

(3) 補題 2.25 の (1) と (3) より，

$E\{(X_1-X_2)^2+(X_1+X_2)(X_1-X_2)(1+X_3)\}$

$\quad = E(X_1^2)-2E(X_1X_2)+E(X_2^2)+E(X_1^2-X_2^2)E(1+X_3)$

$\quad = 1+0+1+0=2$

問 2.31　$n=2$ として補題 2.25(3) を適用する。$i \neq i'$ に対して

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X_i, X_{i'}) &= E[\{X_i - E(X_i)\}\{X_{i'} - E(X_{i'})\}] \\ &= E\{X_i - E(X_i)\}E\{X_{i'} - E(X_{i'})\} \\ &= \{E(X_i) - E(X_i)\}\{E(X_{i'}) - E(X_{i'})\} \\ &= 0\end{aligned}$$

問 2.32　(1) $V(\boldsymbol{Y}) = \begin{pmatrix} V(Y_1) & Cov(Y_1,Y_2) \\ Cov(Y_2,Y_1) & V(Y_2) \end{pmatrix}$.

$xf(x)$ は奇関数であるので

$E(Y_1)=3E(X_1)=0$. 同様に，$E(Y_2)=0$ である．

$V(Y_1)=E(Y_1^2)=E(X_1^2+X_2^2+X_3^2)=3E(X_1^2)=3$

$V(Y_2)=E(Y_2^2)=E(X_1^2+4X_2^2+9X_3^2)=14E(X_1^2)=14$

$Cov(Y_2,Y_1)=Cov(Y_1,Y_2)=E(Y_1Y_2)=E(X_1^2+2X_2^2+3X_3^2)=6$

であるので答えは，

$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}$ である．

(2) $V(\boldsymbol{Z}) = \begin{pmatrix} V(Z_1) & Cov(Z_1,Z_2) \\ Cov(Z_2,Z_1) & V(Z_2) \end{pmatrix}$.

$x^3f(x)$ も奇関数であるので

$E(Z_1)=E(X_1)+2E(X_2)+E(X_3^3)=0$. 一方，

$$E(Z_2)=E(X_2^3)+E(X_3^2)=E(X_3^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = 1$$

である．

$$\begin{aligned}V(Z_1) &= E(Z_1^2)=E(X_1^2+4X_2^2+X_3^6+4X_1X_2+4X_2X_3^3+2X_1X_3^3) \\ &= E(X_1^2+4X_2^2+X_3^6)=E(X_1^2)+4E(X_2^2)+E(X_3^6) \\ &= 1+4+15=20\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V(Z_2) &= E(Z_2^2)-\{E(Z_2)\}^2=E(X_2^6+2X_2^3X_3^2+X_3^4)-1 \\ &= E(X_2^6)+E(X_3^4)-1=15+3-1=17\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Cov(Z_2, Z_1) &= Cov(Z_1, Z_2) = E(Z_1 Z_2) - E(Z_1)E(Z_2) \\
&= E(Z_1 Z_2) = E(X_1 X_2^3 + X_1 X_3^2 + 2X_2^4 + 2X_2 X_3^2 + X_3^3 X_2^3 + X_3^5) \\
&= E(X_1)E(X_2^3) + E(X_1)E(X_3^2) + 2E(X_2^4) + 2E(X_2)E(X_3^2) \\
&\quad + E(X_3^3)E(X_2^3) + E(X_3^5) \\
&= 2E(X_2^4) = 6
\end{aligned}
$$

であるので答えは，$\begin{pmatrix} 20 & 6 \\ 6 & 17 \end{pmatrix}$ である．

問 2.33　(1) 系 2.34 で，Y, X, a, b として，それぞれ Y_1, X_1, σ_1, μ_1 をあてはめて，

$$
f_{Y_1}(y_1) = \frac{1}{\sigma_1} f_{X_1}\left(\frac{y_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left\{-\frac{(y_1 - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}
$$

(2) $n = 2$ として，定義 2.20 を適用して，

$$
f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) = \frac{1}{2\pi} \exp\left\{-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\right\}
$$

(3) $Y_1 = \mu_1 + \sigma_1 X_1$, $Y_2 = \mu_2 + \sigma_2(\rho X_1 + \sqrt{1-\rho^2} X_2)$ と

$$
\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \sigma_2 \rho & \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}
$$

は同等であるので，$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \sigma_2 \rho & \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix}$,　$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$ である．

(4) 系 2.36 より解る．

第 3 章

問 3.1

$$
\begin{aligned}
e^{ia} \cdot e^{ib} &= (\cos(a) + i\sin(a))(\cos(b) + i\sin(b)) \\
&= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) + i\{\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)\} \\
&= \cos(a+b) + i\sin(a+b) \\
&= e^{i(a+b)}
\end{aligned}
$$

問 3.2

$$
\begin{aligned}
(e^{ix})' &= (\cos(x) + i\sin(x))' \\
&= -\sin(x) + i\cos(x) \\
&= i(\cos(x) + i\sin(x)) \\
&= ie^{ix}
\end{aligned}
$$

問 3.3　変数変換 $y \equiv (x-\mu)/\sigma$ と $y^3\varphi(y)$ が奇関数より

$$
\begin{aligned}
\ell_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} y^3\varphi(y)dx \\
&= 0
\end{aligned}
$$

同様に，

$$
\begin{aligned}
\ell_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} y^4\varphi(y)dy - 3 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} y^3\{-\varphi(y)\}'dy - 3 \\
&= \big[-y^3\varphi(y)\big]_{-\infty}^{\infty} + 3\int_{-\infty}^{\infty} y^2\varphi(y)dy - 3 \\
&= 3 - 3 = 0
\end{aligned}
$$

問 3.4　定理 3.4 より，$\psi_X(t) = e^{i\mu t - \sigma^2 t^2/2}$ である．

$$\psi'_X(t) = (i\mu - \sigma^2 t)e^{i\mu t - \sigma^2 t^2/2},\ \psi'_X(0) = i\mu,$$

$$\psi''_X(t) = \{-\sigma^2 + (i\mu - \sigma^2 t)^2\}e^{i\mu t - \sigma^2 t^2/2},\ \psi''_X(0) = -\sigma^2 - \mu^2$$

である．関係式

$$E(X) = -i\psi_X^{(1)}(0) = \mu, \quad V(X) = -\psi_X^{(2)}(0) + \{\psi_X^{(1)}(0)\}^2 = \sigma^2$$

問 3.5　系 3.6 より，(1)　$aX_1 + b \sim N(a+b, 2a^2)$

(2)　$aX_1 + bX_2 \sim N(a+2b, 2a^2+5b^2)$

問 3.6　(1)　$P(Z < 1.645) = 1 - P(Z \geqq 1.645) = 1 - 0.05 = 0.95$

(2)　$P(Z > 1.960) = 0.025$

(3)　$P(|Z| > 1.282) = 2P(Z > 1.282) = 2 \times 0.1 = 0.2$

(4)　$P(|Z| < 1.282) = 1 - P(|Z| > 1.282) = 0.8$

問 3.7　(1)　$1 - P(Z > z_\alpha) = P(Z < z_\alpha) = 0.95 \ \Leftrightarrow\ P(Z > z_\alpha) = 0.05$

ゆえに，$z_\alpha = 1.645$

(2)　$P(Z > z_\alpha) = 0.01 \qquad z_\alpha = 2.326$

(3)　$P(Z > z_\alpha) = 0.9 \Leftrightarrow\ P(Z < z_\alpha) = 0.1 \Leftrightarrow\ P(Z > -z_\alpha) = 0.1$

よって，$-z_\alpha = 1.282$　ゆえに，$z_\alpha = -1.282$

(4)　$2P(Z > z_\alpha) = P(|Z| > z_\alpha) = 0.1 \ \Leftrightarrow\ P(Z > z_\alpha) = 0.05$

ゆえに，$z_\alpha = 1.645$

問 3.8　(1)

$$\boldsymbol{\Sigma}_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\Sigma}_2 \equiv 1$$

とすると，

$$\boldsymbol{\Sigma}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\Sigma}_2^{-1} = 1$$

であるので，基本定理 3.8(2) より，

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である．

(2) 基本定理 3.7(1) より，$det(\boldsymbol{\Sigma}) = det(\boldsymbol{\Sigma}_1) = 1/2$

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}) \\
&\quad = (x_1-1, x_2-2, x_3-3)\cdot\begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1-1 \\ x_2-2 \\ x_3-3 \end{pmatrix} \\
&\quad = (x_1-1, x_2-2)\cdot\begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1-1 \\ x_2-2 \end{pmatrix} + (x_3-3)^2 \\
&\quad = 2\left\{(x_1-1)^2 - \sqrt{2}(x_1-1)(x_2-2) + (x_2-2)^2\right\} + (x_3-3)^2
\end{aligned}$$

である．ここで，同時密度関数は，

$$f(\boldsymbol{x}|\ \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2(\pi)^{\frac{3}{2}}}\exp\left\{-(x_1-1)^2 + \sqrt{2}(x_1-1)(x_2-2) - (x_2-2)^2 - \frac{1}{2}(x_3-3)^2\right\}$$

問 3.9　定理 3.7 より

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{X} \sim N_n(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{C}\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{C}^T) = N_n(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma})$$

問 3.10　(1) $E(\boldsymbol{X}') = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_Y - \boldsymbol{\Sigma}_{YZ}\boldsymbol{\Sigma}_Z^{-1}\boldsymbol{\mu}_Z \\ \boldsymbol{\mu}_Z \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
V(\boldsymbol{X}') &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_{n_1} & -\boldsymbol{\Sigma}_{YZ}\boldsymbol{\Sigma}_Z^{-1} \\ \boldsymbol{O}_{n_2\times n_1} & \boldsymbol{I}_{n_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_Y & \boldsymbol{\Sigma}_{YZ} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{ZY} & \boldsymbol{\Sigma}_Z \end{pmatrix} \\
&\quad \cdot\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_{n_1} & \boldsymbol{O}_{n_1\times n_2} \\ -\boldsymbol{\Sigma}_Z^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{ZY} & \boldsymbol{I}_{n_2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_Y - \boldsymbol{\Sigma}_{YZ}\boldsymbol{\Sigma}_Z^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{ZY} & \boldsymbol{O}_{n_1\times n_2} \\ \boldsymbol{O}_{n_2\times n_1} & \boldsymbol{\Sigma}_Z \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(2)　(1) より，$\mathrm{Cov}(Y_i', Z_j') = 0$ であることから，$\boldsymbol{Y}'$ と $\boldsymbol{Z}'$ は互いに独立である．

問 3.11　(1) $Cov(Y_1, Y_2) = E(X_1^2) - E(X_2^2) = \sigma^2 - \sigma^2 = 0$ ゆえに, 独立である．

(2) $V(Y_1) = V(X_1) - 2Cov(X_1, X_2) + V(X_2) = 2\sigma^2 - 2\sigma^2\rho = 2\sigma^2(1-\rho)$

$V(Y_2) = V(X_1) + 2Cov(X_1, X_2) + V(X_2) = 2\sigma^2 + 2\sigma^2\rho = 2\sigma^2(1+\rho)$

ゆえに，$(Y_1, Y_2)^T$ の同時密度関数は，$N(0, 2\sigma^2(1-\rho))$

の密度関数と $N(0, 2\sigma^2(1+\rho))$ の密度関数の積である．

問 3.12　(1) $\boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_2^2(1-\rho^2)} & -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)} \\ -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)} & \frac{1}{\sigma_1^2(1-\rho^2)} \end{pmatrix}$

(2) Z_1, Z_2 は互いに独立でともに $N(0,1)$ に従い,

$$X_1 \equiv \mu_1 + \sigma_1 Z_1,\ X_2 \equiv \mu_2 + \sigma_2(\rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2}Z_2)$$

より，$aX_1 + b = a\sigma_1 Z_1 + b \sim N(b, a^2\sigma_1^2)$.

(3) (2) と同じ表記により,

$$\begin{aligned} aX_1 + bX_2 &= a\sigma_1 Z_1 + b\sigma_2(\rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2}Z_2) \\ &\sim N(0, (a\sigma_1 + b\sigma_2\rho)^2 + (b\sigma_2)^2(1-\rho^2)) \end{aligned}$$

問 3.13　Z_1, Z_2 は互いに独立でともに $N(0,1)$ に従い,

$$X_1 \equiv \mu_1 + \sigma_1(\rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2}Z_2),\ X_2 \equiv \mu_2 + \sigma_2 Z_1$$

とおくと，$(X_1, X_2)^T \sim N_2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ である.

(1) $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

(2) $\mu_2 + \sigma_2 Z_1 = y$ のとき，$Z_2 = (y-\mu_2)/\sigma_2$ これを $X_1 = x$ に代入すると,

$$\mu_1 + \sigma_1\{\rho(y-\mu_2)/\sigma_2 + \sqrt{1-\rho^2}Z_2\} = x$$

これは,

$$Z_2 = \{x - \mu_1 - \sigma_1\rho(y-\mu_2)/\sigma_2\}/\{\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}\}$$

と同値である.

問 3.14　Z_1, Z_2 は互いに独立でともに $N(0,1)$ に従い,

$$X_1 \equiv \mu_1 + \sigma_1 Z_1,\ X_2 \equiv \mu_2 + \sigma_2(\rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2}Z_2)$$

より,

$$Y = Z_1,\ Z = \rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2}Z_2$$

である. $V(Y) = V(Z) = 1$　$Cov(Y,Z) = \rho$ である.

(1) (3.22) 式で，$\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ とした密度関数.

(2) $N_2(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ ただし，$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$ とする.

問 3.15　定理 3.11 を使って解を得る．

(1)

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 &= (1,1,0)\boldsymbol{X} \\ &\sim N((1,1,0)\boldsymbol{\mu},\ (1,1,0)\boldsymbol{\Sigma}(1,1,0)^T) \\ &= N(3,\ 3) \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} aX_1 + bX_2 &= (a,b,0)\boldsymbol{X} \\ &\sim N((a,b,0)\boldsymbol{\mu},\ (a,b,0)\boldsymbol{\Sigma}(a,b,0)^T) \\ &= N(a+2b,\ a^2+ab+b^2) \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} X_2 + X_3 &= (0,1,1)\boldsymbol{X} \\ &\sim N((0,1,1)\boldsymbol{\mu},\ (0,1,1)\boldsymbol{\Sigma}(0,1,1)^T) \\ &= N(5,\ 2) \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} aX_2 + bX_3 &= (0,a,b)\boldsymbol{X} \\ &\sim N((0,a,b)\boldsymbol{\mu},\ (0,a,b)\boldsymbol{\Sigma}(0,a,b)^T) \\ &= N(2a+3b,\ a^2+b^2) \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned} aX_1 + bX_2 + cX_3 &= (a,b,c)\boldsymbol{X} \\ &\sim N((a,b,c)\boldsymbol{\mu},\ (a,b,c)\boldsymbol{\Sigma}(a,b,c)^T) \\ &= N(a+2b+3c,\ a^2+ab+b^2+c^2) \end{aligned}$$

問 3.16　定理 3.11 を使って解を得る．

(1)

$$\begin{aligned} aX_1 + bX_2 &= (a,b,0)\boldsymbol{X} \\ &\sim N((a,b,0)\boldsymbol{\mu},\ (a,b,0)\boldsymbol{\Sigma}(a,b,0)^T) \\ &= N(a+2b,\ a^2+ab+b^2) \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
aX_2 + bX_3 &= (0,a,b)\boldsymbol{X} \\
&\sim N((0,a,b)\boldsymbol{\mu},\ (0,a,b)\boldsymbol{\Sigma}(0,a,b)^T) \\
&= N(2a+3b,\ a^2+ab+b^2)
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
X_1 + X_2 + X_3 &= (1,1,1)\boldsymbol{X} \\
&\sim N((1,1,1)\boldsymbol{\mu},\ (1,1,1)\boldsymbol{\Sigma}(1,1,1)^T) \\
&= N(6,\ 17/3)
\end{aligned}$$

問 3.17　(1)

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_n^T\boldsymbol{X} &\sim N(\mathbf{1}_n^T\mathbf{1}_n,\ \mathbf{1}_n^T\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{1}_n) \\
&= N(n,\ n-cn^2)
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
(a_1,\cdots,a_n)\cdot\boldsymbol{X} &\sim N((a_1,\cdots,a_n)\cdot\mathbf{1}_n,\ (a_1,\cdots,a_n)\cdot\boldsymbol{\Sigma}(a_1,\cdots,a_n)^T) \\
&= N(0,\ 1)
\end{aligned}$$

問 3.18

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}e^{-x}dx$$

$t \equiv \sqrt{x}$ とおくと，$2tdt = dx$

ここで

$$(\text{与式}) = \int_0^\infty \frac{1}{t}e^{-t^2}2tdt = 2\int_0^\infty e^{-t^2}dt$$

基本定理 3.2 を適用して結論を得る．

問 3.19　(1) X の密度関数は，

$$f_X(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}$$

である．$a=\beta,\ b=0$ として，系 2.34 を適用すると結論を得る．

(2) Y の密度関数は，

$$f_Y(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-x}$$

である．$Z \equiv Y/\beta$ とし $a = 1/\beta,\ b = 0$ として，系 2.34 を適用すると

$$f_Z(z) = \beta f_Y(\beta z) = f_X(z)$$

となり，結論を得る．

問 3.20

$$E(X) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}dx = \frac{B(\alpha+1,\beta)}{B(\alpha,\beta)}$$

補題 3.14 を使って $E(X)$ を得る．同様に，

$$E(X^2) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\int_0^1 x^{\alpha+1}(1-x)^{\beta-1}dx = \frac{B(\alpha+2,\beta)}{B(\alpha,\beta)}$$

であるので，補題 3.14 を使って $E(X^2)$ が計算され，$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$ を使って $V(X)$ を得る．

問 3.21　(1) 0.01　(2) $P(|T| > 2.20) = 2P(T > 2.20) = 2 \times 0.025 = 0.05$

(3) $P(T > 2.72) = 1 - P(T > 2.72) = 1 - 0.012 = 0.99$

(4) (2) より，$P(|T| < 2.20) = 1 - P(|T| > 2.20) = 1 - 0.05 = 0.95$

問 3.22　解き方は

問 3.7 と同じ．

(1)　$t_\alpha = 1.78$

(2)　$P(|T| > t_\alpha) = 2P(T > t_\alpha) = 0.05$　　$P(T > t_\alpha) = 0.025$

$t_\alpha = 2.18$

(3)　$P(T > t_\alpha) = 0.01$　　$t_\alpha = 2.68$

(4)　$P(T > t_\alpha) = 0.005$　　$t_\alpha = 3.05$

問 3.23　変換 $T \equiv \dfrac{X+\delta}{\sqrt{Y/n}}$, $U \equiv Y$ により, (T,U) の同時密度は

$$g(t,u) = \varphi(t\sqrt{u/n} - \delta)f_\chi(u,n)\sqrt{u/n}$$

$e^{t\delta\sqrt{u/n}} = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^j\delta^j u^{j/2}}{j!n^{j/2}}$ と無限級数に展開し, $g(t,u)$ を u について項別積分,

$v \equiv \frac{u(t^2/n+1)}{2}$ で変数変換して積分.

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \int_0^\infty g(t,u)du \\
&= \frac{e^{-\delta^2/2}}{\sqrt{2\pi n}\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty u^{(n+1)/2-1} \exp\{-\frac{u(t^2/n+1)}{2}\} \exp(t\delta\sqrt{u/n})du \\
&= \frac{e^{-\delta^2/2}}{\sqrt{2\pi n}\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty u^{(n+1)/2-1} \exp\{-\frac{u(t^2/n+1)}{2}\} \sum_{j=0}^\infty \frac{t^j\delta^j u^{j/2}}{j!n^{j/2}}du \\
&= \frac{e^{-\delta^2/2}}{\sqrt{2\pi n}\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}} \sum_{j=0}^\infty \frac{t^j\delta^j}{j!n^{j/2}} \int_0^\infty u^{(n+1+j)/2-1} \exp\{-\frac{u(t^2/n+1)}{2}\}du \\
&= \frac{e^{-\delta^2/2}}{\sqrt{\pi n}\Gamma(\frac{n}{2})} \sum_{j=0}^\infty \frac{\Gamma(\frac{n+1+j}{2})2^{j/2}\delta^j t^j}{(1+\frac{t^2}{n})^{(n+1+j)/2} j! n^{j/2}}
\end{aligned}
$$

問 3.24　(1) 定理 3.26 より, $E(X_i) = 0$ に確率収束する.

(2) $E(X_i^2) = 1$ に確率収束する.

問 3.25　(1) 定理 3.26 より, $E(X_i) = \mu$ に確率収束する.

(2) $E\{(X_i - \mu)^2\} = \sigma^2$ に確率収束する.

(3) 定理 3.26 より, $\{(X_i - \mu)^3\} = 0$ に確率収束する.

(4) $E\{(X_i - \mu)^4\}/\sigma^4 = 3$ に確率収束する.

問 3.26　(1) 定理 3.27, 定理 3.32 より, $N(0, V(X_i)) = N(0, 1)$ に分布収束する.

(2) $N(0, V(X_i^2)) = N(0, 2)$ に分布収束する.

(3) 定理 3.27, 定理 3.32 より, $N(0, V(X_i^3)) = N(0, 15)$ に分布収束する.

第 4 章

問 4.1 (1) $\prod_{i=1}^{n} \Phi\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)$ (2) $\frac{1}{\sigma^n}\prod_{i=1}^{n} \varphi\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)$

問 4.2 (1) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n_1} \Phi\left(\frac{x_i-\mu_1}{\sigma}\right)\prod_{j=1}^{n_2} \Phi\left(\frac{y_j-\mu_2}{\sigma}\right)$

(2) $\displaystyle\frac{1}{\sigma^n}\prod_{i=1}^{n_1} \varphi\left(\frac{x_i-\mu_1}{\sigma}\right)\prod_{j=1}^{n_2} \varphi\left(\frac{y_j-\mu_2}{\sigma}\right)$

問 4.3 $T(\boldsymbol{X}) \equiv \sqrt{n}(\bar{X}_n - 1)$ とおく．

(1) $\frac{f_n(\boldsymbol{X}|2)}{f_n(\boldsymbol{X}|1)}$ が大きいとき H_0 を棄却することと，

$T(\boldsymbol{X})$ が大きいとき棄却することは同値となる．H_0 の下で，$T(\boldsymbol{X}) \sim N(0,1)$ である．定理 4.1 より，

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & (T(\boldsymbol{x}) > 2.326 \text{ のとき}) \\ 0 & (T(\boldsymbol{x}) < 2.326 \text{ のとき}) \end{cases}$$

が最強力検定である．

(2)

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & (T(\boldsymbol{x}) > 1.645 \text{ のとき}) \\ 0 & (T(\boldsymbol{x}) < 1.645 \text{ のとき}) \end{cases}$$

が最強力検定である．

(3) (2) の検定方式と同じ．

(4) H_2 の下で，$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \sim N(0,1)$ である．検出力関数は

$$\begin{aligned} E_\mu(\phi(\boldsymbol{X})) &= P_\mu(T(\boldsymbol{X}) > 1.645) \\ &= P\left(\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) > 1.645 - \sqrt{n}(\mu - 1)\right) \\ &= 1 - \Phi(1.645 - \sqrt{n}(\mu - 1)) \end{aligned}$$

で与えられる．

(5)

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & (-T(\boldsymbol{x}) > 1.645 \text{ のとき}) \\ 0 & (-T(\boldsymbol{x}) < 1.645 \text{ のとき}) \end{cases}$$

が最強力検定である．

(6) (5) の検定方式と同じ．

問 4.4　『 帰無仮説 $H_0 : \theta = \theta_0$ vs. 対立仮説 $H_1' : \theta_1 > \theta_0$ 』に対する最強力検定は

$$\frac{f_n(\boldsymbol{X};\theta_1)}{f_n(\boldsymbol{X};\theta_0)} = \exp[\{c(\theta_1) - c(\theta_0)\}T(\boldsymbol{X}) + d(\theta_1) - d(\theta_0)]$$

が大きいとき H_0 を棄却することである. これは, $T(\boldsymbol{X})$ が大きいとき H_0 を棄却することと同値. 一様最強力検定であることは例 4.3 と同様に示せる.

問 4.5　(4.9) 式で $k=1$, $T_1 = \bar{X}_n$ として定理 4.2 を適用できる．$E(\bar{X}_n) = \mu$ により結論を得る．

問 4.6　例 4.3 と同様にして，(4.9) 式で $k=4$,

$$T_1(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \sum_{i=1}^{n_1} X_i,\ T_2(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \sum_{i=1}^{n_1} X_i^2,\ T_3(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \sum_{i=1}^{n_2} Y_i,\ T_4(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \sum_{i=1}^{n_2} Y_i^2$$

として定理 4.2 を適用できる．$\bar{X}, \bar{Y}$ を標本平均とし，

$$\tilde{\sigma}_n^2 \equiv \frac{1}{n-2}\left\{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \bar{X})^2 + \sum_{j=1}^{n_2}(Y_j - \bar{Y})^2\right\}$$

とおく．

$E(\bar{X}) = \mu_1$, $E(\bar{Y}) = \mu_2$, $E(\tilde{\sigma}_n^2) = \sigma^2$ により結論を得る．

問 4.7　仮定より, $E(X_i) = \int_{-\infty}^{\infty} xg(x/\sigma)dx = 0$ である．

(1) $y \equiv x/\sigma$ により，

$$V(X_i) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 g(x/\sigma)dx = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} y^2 g(y)dx = \sigma^2$$

(2) $E(T_n) = \quad E(X_1^2) = \sigma^2$

(3) $E\{(X_i^2 - \sigma^2)^2\} = E(X_1^4) - 2\sigma^4 + \sigma^4 = 2\sigma^4$

(4) (3) より，$R(\sigma^2, T_n) = 2\sigma^4/n$ である．ここで，$e(T_n, T_{n-1}) = n/(n-1)$ を得る．

(5) 大数の法則より， $T_n \xrightarrow{P} E(X_1^2) = \sigma^2$ である.

(6) 中心極限定理と (3) より,

$$\sqrt{n}(T_n - \sigma^2) \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \sim N(0, V(X_1^2)) = N(0, 2\sigma^4)$$

問 4.8　$Z \equiv \sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)/3$ とする.

(1) 系 3.6 より，$V(Z)=1$ であるので，$Z \sim N(0,1)$ である．

(2) $P(|Z|<u)=P_\mu(-u<\sqrt{n}(\bar{X}_n-\mu)/3<u)=0.95$ ゆえに，$u=1.960$

(3) (2) と同様に，$v=2.576$

(4) $-1.960<\sqrt{n}(\bar{X}_n-\mu)/3<1.960$

$$\iff \bar{X}_n-5.88/\sqrt{n}<\mu<\bar{X}_n+5.88/\sqrt{n}$$

(5) $-2.576<\sqrt{n}(\bar{X}_n-\mu)/3<2.576$

$$\iff \bar{X}_n-8.268/\sqrt{n}<\mu<\bar{X}_n+8.268/\sqrt{n}$$

第 5 章

問 5.1 — 問 5.3　積分計算だけであるので省略.

問 5.4

$$
\begin{aligned}
P(Y \leqq x) &= P(U_1 \leqq 1-\varepsilon, \sigma \cdot X + \mu \leqq x) + P(U_1 > 1-\varepsilon, 3\sigma \cdot X + \mu \leqq x) \\
&= P(U_1 \leqq 1-\varepsilon) P(\sigma \cdot X + \mu \leqq x) + P(U_1 > 1-\varepsilon) P(3\sigma \cdot X + \mu \leqq x) \\
&= (1-\varepsilon)\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) + \varepsilon \cdot \Phi\left(\frac{x-\mu}{3\sigma}\right)
\end{aligned}
$$

であるので，Y は $(1-\varepsilon)N(\mu, \sigma^2) + \varepsilon N(\mu, 9\sigma^2)$ に従う確率変数となる.

問 5.5　(1)

$$
\begin{aligned}
P(Z \leqq x) &= P(U_2 \leqq 1/(1+e^{-x})) \\
&= 1/(1+e^{-x})
\end{aligned}
$$

であるので，$Z \sim LG(0,1)$ が示せた.

(2) $cZ + \mu \sim LG(\mu, c)$

(3) $Y \sim (1-\varepsilon)LG(\mu, \sigma) + \varepsilon LG(\mu, 3\sigma)$

問 5.6

$$
E_0\{\phi(\boldsymbol{X})\} = P_0(T_R > w^s(n;\alpha)) + \gamma_2 \cdot P_0(T_R = w^s(n;\alpha)) = \alpha
$$

問 5.7　$Z \sim N(0,1)$

$$
E_0\{\phi(\boldsymbol{X})\} = P_0(Z_R > z(\alpha)) \approx P(Z > z(\alpha)) = \alpha
$$

問 5.8　(1) 1.0 1.6 2.2 2.3 2.9 3.4 3.6 4.0 4.7 5.8

(2) ホッジス • レーマン順位推定量 3.15 標本平均 3.15

(3) ホッジス • レーマン順位推定量 5.25 標本平均 27.9

(4) ホッジス • レーマン順位推定量 3.25 標本平均 26.7

問 5.9　(1) 1.0 1.2 2.2 3.3 4.5 5.5 6.7 7.8 8.8 10.0

(2)

$$\hat{F}_{X;10}(x) = \begin{cases} 0 & (x < 1.0 \text{ のとき}) \\ 0.1 & (1.0 \leqq x < 1.2 \text{ のとき}) \\ 0.2 & (1.2 \leqq x < 2.2 \text{ のとき}) \\ 0.3 & (2.2 \leqq x < 3.3 \text{ のとき}) \\ 0.4 & (3.3 \leqq x < 4.5 \text{ のとき}) \\ 0.5 & (4.5 \leqq x < 5.5 \text{ のとき}) \\ 0.6 & (5.5 \leqq x < 6.7 \text{ のとき}) \\ 0.7 & (6.7 \leqq x < 7.8 \text{ のとき}) \\ 0.8 & (7.8 \leqq x < 8.8 \text{ のとき}) \\ 0.9 & (8.8 \leqq x < 10.0 \text{ のとき}) \\ 1 & (10.0 \leqq x \text{ のとき}) \end{cases}$$

(3) $\bar{x}_{0.1} = (1.2 + 2.2 + \cdots + 8.8)/8 = 5.0$

(4) med(x)$= 5.0$ $\breve{\sigma}_n = 2.8/0.6745 = 4.15$

(5) (3) と同じ答え.

(6) (4) と同じ答え.

第 6 章

問 6.1　例 4.3 と同様に，同時密度関数が $k=4$ の (4.9) の指数分布族であることが示せる．このとき，

$$\tilde{\mu} = \bar{X}_n,\ \tilde{\sigma}^2 = \tilde{\sigma}_n^2$$

が全て，$T_1(\boldsymbol{X}),\ T_2(\boldsymbol{X}),\ T_3(\boldsymbol{X}),\ T_4(\boldsymbol{X})$ の関数であることが示せる．さらに，それぞれが不偏推定量になっていることが分り，定理 4.2 を使うことにより結論を得る．

問 6.2　一般性を失うことなく $\mu_1 = \mu_2 = 0,\ \sigma^2 = 1$ と仮定できる．定理 6.1 より結論を得る．

問 6.3　(1) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$　　　　(2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

問 6.4　指数分布がガンマ分布の特別な場合から結論を得る．

問 6.5

$$E_0\{\phi(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\} = 1 \times P_0(T_S > t(n-2;\alpha)) + 0 \times P_0(T_S < t(n-2;\alpha)) = \alpha$$

より, 検定方式は水準 α の検定である．

問 6.6　中心極限定理とスラツキーの定理を適用して導くことができる．

問 6.7

$$E_0\{\phi(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\} = P_0(T_R > w(n,n_1;\alpha)) + \gamma_2 \cdot P_0(T_R = w(n,n_1;\alpha)) = \alpha$$

問 6.8

$$E_0\{\phi(\boldsymbol{X})\} = 1 \times P_0(Z_R > z(\alpha)) + 0 \times P_0(Z_R < z(\alpha)) \approx P(Z > z(\alpha)) = \alpha$$

問 6.9　(1) -1.00 -0.40 0.40 0.80 1.00 1.20 1.40 2.60 2.60 3.00 3.20 4.80

(2) $\hat{\delta} = 1.3,\ \tilde{\delta} = 1.6$

(3) $\hat{\delta} = 1.3,\ \tilde{\delta} = 25.2$

ホッジス ● レーマン順位推定の相違　0

正規性の下での最良手法の相違　$|25.2 - 1.6| = 23.6$

問 6.10　両側検定を行う．

1. 正規性の下での最良手法の結果

t 検定統計量の値は 2.99965 $t(8; 0.025) = 2.31$ 有意水準 0.05 の t 検定で一様性の帰無仮説は棄却された.

第 1 群 (標本) の平均の推定値は, 24.7

第 2 群 (標本) の平均の推定値は, 13.1

平均差の推定値は, 11.6

共通分散の推定値は, 35.8

信頼係数 0.95 の信頼区間は $(2.68, 20.50)$

2. ノンパラメトリック法の結果

2 群 (標本) モデルにおける順位に基づくノンパラメトリック法

検定統計量の値は 10.0　　$w(10, 6; 0.01) = w(10, 4; 0.01) = 10.0$ より

有意水準 5 パーセントで, 一様性の帰無仮説は棄却された.

平均差の順位推定値は, 10.8

95 パーセント信頼区間を求める.

$w(10, 6; 0.025) = w(10, 4; 0.025) = 9.0$

$N = n_1 \cdot n_2 = 24$. $D_{(1)} \leqq \cdots \leqq D_{(24)}$ の実現値順序統計量は次の表 1 で与えられる.

表 1: 差の順序統計量

$D_{(1)} \leqq \cdots \leqq D_{(24)}$ の実現値									
-3.90	-1.70	1.90	4.10	4.80	5.70	6.20	7.90	8.40	10.50
10.60	10.60	11.00	14.40	14.90	16.30	16.40	16.80	20.10	20.20
20.60	20.60	20.70	21.10						

95 パーセント順位信頼区間は　$[D_{(9)},\ D_{(16)}) = [8.4,\ 16.3)$

第 7 章

問 7.1　$X_i \sim B(1,p)$, X_i は独立とすれば，$X = X_1 + \cdots + X_n$ である．

$$\psi_{X_i}(t) = E(e^{itX_i}) = e^{it0}P(X_i = 0) + e^{it1}P(X_i = 1) = 1 - p + pe^{it}$$

である．補題 3.1 より結論が得られる．

問 7.2　(1)

$$\frac{L}{KF_L^K(\alpha) + L} \geqq p_0 \Longrightarrow H_0 \text{ を棄却する．}$$

(2) 検定関数で表すと，

$$\phi(X) = \begin{cases} 1 & (X \geqq u(p_0, n; \alpha)) \\ \gamma & (X = u(p_0, n; \alpha) - 1) \\ 0 & (X < u(p_0, n; \alpha) - 1) \end{cases}$$

である．ただし，

$$\gamma \equiv \frac{\alpha - P_0\left(X \geqq u(p_0, n; \alpha)\right)}{P_0\left(X = u(p_0, n; \alpha) - 1\right)}$$

とする．

(3) $p_0^n \leqq \alpha$

問 7.3　(1)

$$\frac{K^* F_{L^*}^{K^*}(\alpha)}{K^* F_{L^*}^{K^*}(\alpha) + L^*} \leqq p_0 \Longrightarrow H_0 \text{ を棄却する．}$$

(2) 検定関数で表すと，

$$\phi(X) = \begin{cases} 1 & (X \leqq \ell(p_0, n; \alpha)) \\ \frac{\alpha - P_0(X \leqq \ell(p_0, n; \alpha))}{P_0(X = \ell(p_0, n; \alpha) + 1)} & (X = \ell(p_0, n; \alpha) + 1) \\ 0 & (X > \ell(p_0, n; \alpha) + 1) \end{cases}$$

である．

(3) $(1 - p_0)^n \leqq \alpha$

問 7.4　水準 α の検定方式は検定関数 $\phi(\cdot)$ を使って，

$$\phi(\boldsymbol{X}) = \begin{cases} 1 & (T > z(\alpha) \text{ のとき}) \\ 0 & (T < z(\alpha) \text{ のとき}) \end{cases}$$

と表現される．

問 7.5　(7.28) の 99 パーセント信頼区間では (0.16457, 0.41683),

(7.29) の 99 パーセント信頼区間では (0.23311, 0.37827)

であった．いずれも 0.15 よりも大きな値の区間であるので 15 パーセント以上の支持があるといってよい．A 氏は立候補すべきである．

問 7.6　(1)

$$c \equiv \frac{d\theta}{dp} = \frac{1}{p} + \frac{1}{1-p} = \frac{1}{p(1-p)} \tag{1}$$

が導かれる．さらに，

$$\hat{\theta} \equiv \log\left(\frac{\hat{p}}{1-\hat{p}}\right)$$

とおく．定理 3.35 のデルタ法で $b \equiv p$，$Y_n \equiv \hat{p}$，$\mathcal{Y} \equiv \sqrt{p(1-p)}Z$，$g(x) \equiv \log\{x/(1-x)\}$ を当てはめ，(7.24)，(1) 式を使うと

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}-\theta) \ \stackrel{\mathcal{L}}{\to}\ c\sqrt{p(1-p)}Z \ \sim\ N\left(0, \frac{1}{p(1-p)}\right)$$

が導かれる．

これにより，

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sqrt{n\hat{p}(1-\hat{p})}\cdot|\hat{\theta}-\theta| < z(\alpha/2)\right) = 1-\alpha$$

ここで，θ についての信頼係数 $1-\alpha$ の同時信頼区間は，

$$\hat{\theta} - z(\alpha/2)/\sqrt{n\hat{p}(1-\hat{p})} < \theta < \hat{\theta} + z(\alpha/2)/\sqrt{n\hat{p}(1-\hat{p})}$$

で与えられる．

(2)

$$\theta \equiv \log\left(\frac{p}{1-p}\right) \iff p = \frac{e^\theta}{e^\theta + 1}$$

より，次を得る．

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\exp\left(\hat{\theta} - z(\alpha/2)\cdot U\right)}{\exp\left(\hat{\theta} - z(\alpha/2)\cdot U\right)+1} \ < \ p \ < \ \frac{\exp\left(\hat{\theta} + z(\alpha/2)\cdot U\right)}{\exp\left(\hat{\theta} + z(\alpha/2)\cdot U\right)+1}\right)$$
$$= 1-\alpha$$

が成り立つ．ただし，

$$U \equiv \frac{1}{\sqrt{n\hat{p}(1-\hat{p})}} \tag{2}$$

とする．

これにより，U を (2) 式で定義したとき，信頼係数 $1-\alpha$ の p に関する漸近的な信頼区間は,

$$\frac{\exp\left(\hat{\theta}-z(\alpha/2)\cdot U\right)}{\exp\left(\hat{\theta}-z(\alpha/2)\cdot U\right)+1} \ < \ p \ < \frac{\exp\left(\hat{\theta}+z(\alpha/2)\cdot U\right)}{\exp\left(\hat{\theta}+z(\alpha/2)\cdot U\right)+1}$$

で与えられる．

この区間は指数が正から，0 も 1 も含んでいない．

問 7.7　(1) 水準 α の検定は，つぎで与えられる．

$T > z(\alpha) \implies H_0$ を棄却し，H_2 を受け入れ，$p_1 > p_2$ と判定する.

(2) $-T > z(\alpha) \implies H_0$ を棄却し，H_3 を受け入れ，$p_1 < p_2$ と判定する.

問 7.8

$$2\sqrt{n}\left\{\arcsin\left(\sqrt{\hat{p}}\right)-\arcsin\left(\sqrt{p}\right)\right\} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1)$$

であるので,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|2\sqrt{n}\left\{\arcsin\left(\sqrt{\hat{p}}\right)-\arcsin\left(\sqrt{p}\right)\right\}\right| < z(\alpha/2)\right) = 1-\alpha \tag{3}$$

である．(3) 式の確率の中は同値関係

$$\begin{aligned}
&\left|2\sqrt{n}\left\{\arcsin\left(\sqrt{\hat{p}}\right)-\arcsin\left(\sqrt{p}\right)\right\}\right| < z(\alpha/2) \\
\iff\ & \arcsin\left(\sqrt{\hat{p}}\right)-\frac{z(\alpha/2)}{2\sqrt{n}} < \arcsin\left(\sqrt{p}\right) < \arcsin\left(\sqrt{\hat{p}}\right)+\frac{z(\alpha/2)}{2\sqrt{n}} && (4)\\
\iff\ & \sin\left\{\arcsin\left(\sqrt{\hat{p}}\right)-\frac{z(\alpha/2)}{2\sqrt{n}}\right\} < \sqrt{p} < \sin\left\{\arcsin\left(\sqrt{\hat{p}}\right)+\frac{z(\alpha/2)}{2\sqrt{n}}\right\} && (5)
\end{aligned}$$

が成り立つ．(4) 式が $\arcsin\left(\sqrt{p}\right)$ の信頼区間である．(5) 式は $\sqrt{p}$ の信頼区間である．

問 7.9　$\hat{p}_1 = X/n_1$, $\hat{p}_2 = Y/n_2$ として [6] の漸近的な両側検定を行う．

arcsin を使わない古い方法; 検定統計量の値は 5.57781

arcsin を使う方法; 検定統計量の値は 4.93179

いずれの場合も，有意水準 0.01 の検定により，帰無仮説は棄却された.

第 1 群 (標本) の成功の確率の推定値は, 0.4400

第 2 群 (標本) の成功の確率の推定値は, 0.1167

成功の確率の差の推定値は, 0.3233

$p_1 - p_2$ に対する 99 パーセント信頼区間は (0.17402, 0.47265),

$\arcsin\left(\sqrt{p_1}\right)-\arcsin\left(\sqrt{p_2}\right)$ に対する 99 パーセント信頼区間は

(0.17994, 0.57341) である．

都市の方がスギ花粉症の割合が多い．

第 8 章

問 8.1　(1)

$$
\begin{aligned}
E(e^{itX}) &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{itk} f(k|\mu) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} e^{itk} \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\mu e^{itk}\right)^k}{k!} e^{-\mu} \\
&= \exp\{\mu(e^{it}-1)\}
\end{aligned}
$$

(2) t で微分して $t=0$ を代入することにより容易に計算できる．

問 8.2　(1)

$$
\frac{\chi^2_{2W}(1-\alpha)}{2n} \ \geqq\ \mu_0 \implies H_0 \text{ を棄却し，} H_2 \text{ を受け入れ，} \mu > \mu_0 \text{ と判定する．}
$$

(2) 検定関数を使って

$$
\phi(W) = \begin{cases} 1 & (W \geqq u(\mu_0, n; \alpha)) \\ \gamma & (W = u(\mu_0, n; \alpha) - 1) \\ 0 & (W < u(\mu_0, n; \alpha) - 1) \end{cases} \tag{6}
$$

である．ただし,

$$
\gamma \equiv \frac{\alpha - P_0\left(W \geqq u(\mu_0, n; \alpha)\right)}{P_0\left(W = u(\mu_0, n; \alpha) - 1\right)}
$$

とする．

問 8.3　(1)

$$\frac{\chi^2_{2(W+1)}(\alpha)}{2n} \leqq \mu_0 \Longrightarrow H_0 \text{ を棄却し，} H_3 \text{ を受け入れ，} \mu < \mu_0 \text{ と判定する．}$$

(2) 検定関数を使って

$$\phi(W) = \begin{cases} 1 & (W \leqq \ell(\mu_0, n; \alpha)) \\ \frac{\alpha - P_0(W \leqq \ell(\mu_0, n; \alpha))}{P_0(W = \ell(\mu_0, n; \alpha) + 1)} & (W = \ell(\mu_0, n; \alpha) + 1) \\ 0 & (W > \ell(\mu_0, n; \alpha) + 1) \end{cases}$$

(3) $e^{-n\mu_0} \leqq \alpha$

問 8.4　水準 α の検定は，つぎで与えられる．

$$T > z(\alpha) \Longrightarrow H_0 \text{ を棄却し，} H_2 \text{ を受け入れ，} \mu > \mu_0 \text{ と判定する．}$$

問 8.5　(1) 水準 α の検定は，つぎで与えられる．

$$T > z(\alpha) \Longrightarrow H_0 \text{ を棄却し，} H_2 \text{ を受け入れ，} \mu_1 > \mu_2 \text{ と判定する．}$$

(2)　$-T > z(\alpha) \Longrightarrow H_0$ を棄却し，H_3 を受け入れ，$\mu_1 < \mu_2$ と判定する．

第 9 章

問 9.1　系 3.24 より，$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2 \sim \chi^2_{n-1}$　　$E(\chi^2_{n-1}) = n - 1$

故に, $E(\tilde{\sigma}_0^2) = \sigma^2 \frac{E(\chi^2_{n-1})}{n} = \frac{n-1}{n}\sigma^2$

問 9.2　系 3.24 より，$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2_{n_1-1}$, $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i - \bar{Y})^2 \sim \chi^2_{n_2-1}$

系 3.18 より，$\chi^2_{n_1-1} + \chi^2_{n_2-1} \sim \chi^2_{n-2}$　残りは
問 9 1 と同じ.

問 9.3

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n + \bar{X}_n - \mu_0)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2 + 2(\bar{X}_n - \mu_0)\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n) + n(\bar{X}_n - \mu_0)^2
\end{aligned}
$$

$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n) = 0$ より結果を得る

問 9.4

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \tilde{\mu}^*)^2 &= \sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \tilde{\mu}_1 + \tilde{\mu}_1 - \tilde{\mu}^*)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \tilde{\mu}_1)^2 + 2(\bar{X}_n - \tilde{\mu}^*)\sum_{i=1}^{n}(X_i - \tilde{\mu}_1) + \frac{n_1 n_2^2}{n^2}(\bar{X} - \bar{Y})^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \tilde{\mu}_1)^2 + \frac{n_1 n_2^2}{n^2}(\bar{X} - \bar{Y})^2
\end{aligned}
$$

同様に,

$$
\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j - \tilde{\mu}^*)^2 = \sum_{j=1}^{n_2}(Y_j - \tilde{\mu}_2)^2 + \frac{n_1^2 n_2}{n^2}(\bar{X} - \bar{Y})^2
$$

以上より結果を得る

問 9.5　　$c_n = \frac{n_1 n_2 (n+1)(n-1)}{12}$, $d_n = \sqrt{n_2 n(n-2)}$