経済数学入門—初歩から一歩ずつ—

練習問題解答

第1章　練習問題解答

問題 1　素因数分解してください．(1) 64　(2) 364

解答 1　(1) 2^6　(2) $2^2 \times 7 \times 13$

問題 2　次を計算して下さい．$\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$

解答 2　$\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2 \cdot 3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$

問題 3　ある実数 a, b に対して「$a \geq b$ かつ $a \leq b$ ならば $a = b$ である」は正しいか？

解答 3　$a \geq b$ ならば，$a > b$ または $a = b$ である．$a \leq b$ ならば，$a < b$ または $a = b$ である．同時に成り立つのは $a = b$ の時のみです．よって,「$a \geq b$ かつ $a \leq b$ ならば $a = b$ である」は正しい．

問題 4　次を計算して下さい．$3 \times |-2|$

解答 4　$3 \times 2 = 6$

問題 5　次を計算して下さい．$\dfrac{2^2 \times 2 \times (3^2)^2}{6^3}$

解答 5　$\dfrac{2^2 \times 2 \times 3^4}{(2 \cdot 3)^3} = \dfrac{2^3 \times 3^4}{2^3 \cdot 3^3} = \dfrac{1 \times 3^1}{1 \times 1} = 3$

問題 6　次を計算して下さい．$\dfrac{a^3}{b^2c^2} \div \dfrac{ac}{3b}$

解答 6　$\dfrac{a^3}{b^2c^2} \times \dfrac{3b}{ac} = \dfrac{a^2}{b^1c^2} \times \dfrac{3 \times 1}{1 \times c} = \dfrac{3a^2}{bc^3}$

第2章　練習問題解答

問題 1　次の因数分解をやってみてください．　(1) x^2+6x+9　(2) $9a^2-12a+4$ (3) $12x^2+17xy-7y^2$

解答 1　(1) $x^2+2\times 3x+3^2=(x+3)^2$　(2) $(3a)^2-2\times 2\times 3a+2^2=(3a-2)^2$ (3) $3\times 4x^2+(21-4)xy-y\times 7y=(3x-y)(4x+7y)$

問題 2　2 次式 $x-x^2/2$ を平方完成してください．

解答 2　$x-\dfrac{x^2}{2}=-\dfrac{1}{2}(x^2-2x)=-\dfrac{1}{2}\left((x-1)^2-1\right)=-\dfrac{(x-1)^2}{2}+\dfrac{1}{2}$

問題 3　組み立て除法を用いて x^3+1 を $x+1$ で割ってみてください．

解答 3

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & & -1 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

x^3+1 を $x+1$ で割った商は，x^2-x+1 となる．

問題 4　問い 5 を参考にして次を計算してください．(1) $p(x)=x^3-1$ を因数分解してください．　(2) $q(x)=x^3+3x^2+3x+1$ を因数分解してください．

解答 4　(1)

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \boxed{2} \end{array}$$

$p(x)=x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

(2)

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ & & -1 & -2 & -1 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$q(x)=x^3+3x^2+3x+1=(x+1)(x^2+2x+1)=(x+1)^3$

問題 5　次の方程式の判別式の値を求めてください．それが非負ならば解の公式を用いて解を求めてください．(1) $x^2+2x-6=0$ (2) $x^2-x+1=0$

解答 5　(1) $D=2^2-4\cdot 1\cdot(-6)=4+24=28>0$．よって解は 2 つある．

$x = \frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot(-6)}}{2\cdot1} = \frac{-2\pm\sqrt{4+24}}{2} = \frac{-2\pm\sqrt{28}}{2} = \frac{-2\pm\sqrt{2^2\cdot7}}{2} = \frac{-2\pm2\sqrt{7}}{2} = -1\pm\sqrt{7}$
(2) $D = (-1)^2 - 4\cdot1\cdot1 = 1-4 = -3 < 0$．よって解なし．

問題 6　練習 5 (1) の解は約分されて分数ではなくなりました．これを一般化しましょう．2 次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ $(a\neq0)$ が，$b'^2-ac\geq0$ を満たす時，この解の公式を導いてください．

解答 6　解の公式 $x^* = (-b\pm\sqrt{b^2-4ac})/2a$ の b に $2b'$ を代入すると，$x^* = (-2b'\pm\sqrt{(2b')^2-4ac})/2a = (-2b'\pm\sqrt{4b'^2-4ac})/2a = (-2b'\pm2\sqrt{b'^2-ac})/2a = (-b'\pm\sqrt{b'^2-ac})/a$ となる．

第3章　練習問題解答

問題 1　直線 (3) が点 (x_2, y_2) を通ることを示してください.

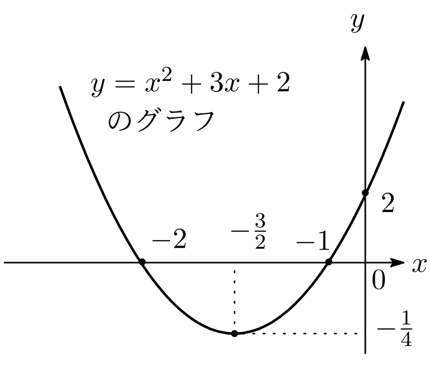
解答 1　(3) の数式 $y = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1) \cdot (x - x_1) + y_1$ の右辺に $x = x_2$ を代入すると $(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1) \cdot (x_2 - x_1) + y_1 = y_2 - y_1 + y_1 = y_2$ よって，(3) は (x_2, y_2) を通る

問題 2　2 次関数 $y = x^2 + 3x + 2$ のグラフを描いてください.

解答 2　2 次関数 $y = x^2 + 3x + 2$ の右辺を平方完成すると

$$y = x^2 + 3x + 2 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 2 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

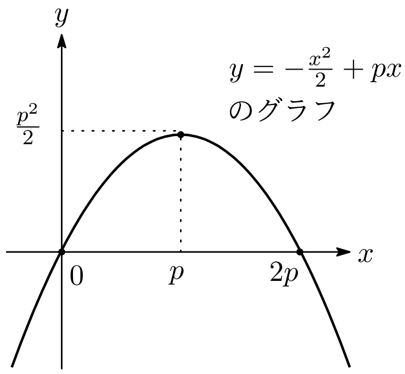
となる．よって，このグラフは 2 次の係数の符号が正なので下に凸になり，頂点の座標は，$(-3/2, -1/4)$ となる．



$\boxed{\textbf{問題 3}}$　例 3 を参考にして，ある正数 p に対して，関数 $y = -x^2/2 + px$ を平方完成してグラフを描いてください.

$\boxed{\text{解答 3}}$　第 4 章の練習問題 1 も参考にして下さい.

$$y = -\frac{x^2}{2} + px = -\frac{1}{2} \cdot (x^2 - 2px) = -\frac{1}{2} \cdot \big((x-p)^2 - p^2\big) = -\frac{1}{2}(x-p)^2 + \frac{p^2}{2}.$$



第4章　練習問題解答

$\boxed{\text{問題 1}}$　アイスクリーム屋の例においてアイスクリームの市場価格が p 円の時の利潤最大化問題を定式化して，解いて下さい．

$\boxed{\text{解答 1}}$　この利潤最大化問題は

$$\max_{x\in\mathbb{R}_+} px - \frac{x^2}{2}$$

であり，第3章練習問題3と同様に下記が平方完成した式である．

$$px - \frac{x^2}{2} = -\frac{1}{2}(x-p)^2 + \frac{p^2}{2}.$$

アイスクリーム屋の最適な生産量は $x = p$，最大化された利潤は $p^2/2$ である．

$\boxed{\text{問題 2}}$　「最大値が存在したとすればそれはただ一つである」を証明して下さい．

$\boxed{\text{解答 2}}$　もし，x^* が最大点の定義を満たしていれば，

$$f(x^*) \geq f(x^{**})$$

が成り立ち，もし，x^{**} が最大点の定義を満たしていれば，

$$f(x^{**}) \geq f(x^*)$$

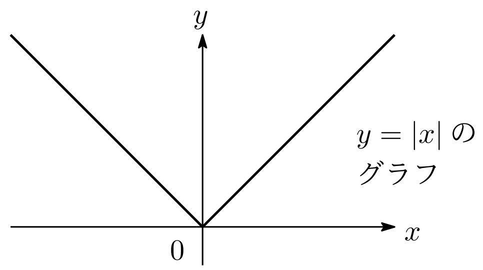
が成り立つ．よって，この2式と第1章の練習問題3で学んだ不等号の性質より $f(x^*) = f(x^{**})$ となる．よって，最大値は唯一である．

問題 3　絶対値関数 $y = |x|$ のグラフを描いて下さい．絶対値関数には最大値や最小値はありますか？また，増加と減少を調べて下さい．

解答 3　絶対値関数 $f(x) = |x|$ は式で書き表すと

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$$

となります．そのグラフは原点で尖ったグラフになります．図より原点で最小値を取りますが，最大値はありません．また，開区間 $(-\infty, 0)$ で減少し，開区間 $(0, +\infty)$ で増加しています．



問題 4　周囲の長さが 20cm である長方形があります．この長方形の面積の最大値はいくらか．また，このとき長方形はどのような形か．

解答 4　縦の辺のの長さを x とすると横の辺の長さは $(20 - 2x)/2$ となる．長方形の面積 y は，

$$y = x \cdot \frac{20 - 2x}{2} = 10x - x^2 = -(x - 5)^2 + 25$$

となる．面積の最大値は，25 となる．両辺の長さは 5 で等しいので正方形となる．

第5章　練習問題解答

$\boxed{\text{問題 1}}$　サンマの需要関数 (3) 式において，価格が 10 円から 20 円に上昇したときのその需要の価格弾力性を求めてください．

$\boxed{\text{解答 1}}$　需要の価格弾力性 $\varepsilon = -(\Delta q/q)/(\Delta p/p)$ の式に代入すると

$$\varepsilon = -\frac{D(20) - D(10)}{20 - 10}\frac{10}{D(10)} = -\frac{30 - 60}{10}\frac{10}{60} = -\frac{-30}{10}\frac{1}{6} = 0.5$$

となる．よって，サンマの需要の価格弾力性は 0.5 となる．

$\boxed{\text{問題 2}}$　市場価格 p に対して供給関数が $S(p) = ap$ $(a > 0)$ に対して，価格が p_1 円から p_2 円に変化したときの供給の価格弾力性を求めて下さい．

$\boxed{\text{解答 2}}$　供給の価格弾力性 $\varepsilon = (\Delta S(p)/S(p))/(\Delta p/p)$ の式に代入すると

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{\Delta S(p)}{\Delta p} \cdot \frac{p}{S(p)} = \frac{ap_2 - ap_1}{p_2 - p_1} \cdot \frac{p_1}{ap_1} = \frac{a(p_2 - p_1)}{p_2 - p_1} \cdot \frac{1}{a} \\ &= \frac{a}{1} \cdot \frac{1}{a} = 1\end{aligned}$$

第6章　練習問題解答

$\boxed{\textbf{問題 1}}$ (3) の平均費用曲線の最低点 x^e は，$y = x/2$ と $y = 10/x$ のグラフの交点の x 座標であることを因数分解 $(A+B)^2 = (A-B)^2 + 4AB$ を用いて証明して，x^e を求めてください．

$\boxed{\textbf{解答 1}}$ 問題から因数分解

$$(A+B)^2 = (A-B)^2 + 4AB$$

が成り立つので，A と B の積が一定のときは $A+B$ の最低点は右辺の括弧内を 0 にする $A = B$ のときです．

$$\frac{x}{2} \cdot \frac{10}{x} = 5$$

で一定なので，$AC(x) = x/2 + 10/x$ の最低点は $x/2 = 10/x$ を満たす x になります．よって，下記の解になります．

$$\frac{x^e}{2} = \frac{10}{x^e} \quad \Longleftrightarrow \quad (x^e)^2 = 20 \quad \Longleftrightarrow \quad x^e = 2\sqrt{5}$$

$\boxed{\textbf{問題 2}}$ 表 1 の生産量 $x = 90$ の時の限界費用と利潤を確かめてください．

$\boxed{\textbf{解答 2}}$ $x = 80$ のとき $C = 80^2/2 = 3200$ と $x = 90$ のとき $C = 90^2/2 = 4050$ から $\Delta C = 4050 - 3200 = 850$ である．$\Delta x = 10$ なので限界費用は

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{850}{10} = 85$$

となる．利潤は，$R = 100 \cdot 90 = 9000$ より下記になる．

$$\pi = 9000 - 4050 = 4950$$

$\boxed{\textbf{問題 3}}$ 表 1 の生産量を 100 から 90 に減らすと利潤が減少することを示してください．

$\boxed{\textbf{解答 3}}$ このとき収入は $100 \times 10 = 1000$ 減ります．この時の限界費用が 95 なので，費用を

$$\Delta C = MC \cdot \Delta x = 95 \cdot 10 = 950$$

削減できます．収入の減少の方が大きいので利潤は 4950 に減ります．

問題 4　$f(x) = x + 1$ と $g(y) = y^2$ に対して，以下を求めてください．
(1) $g \circ f$，　(2) $f \circ g$

解答 4

$$
\begin{aligned}
&(1)\ (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)^2 \\
&(2)\ (f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(y^2) = y^2 + 1
\end{aligned}
$$

第7章　練習問題解答

$\boxed{\text{問題 1}}$　一般項が $a_n = pn + q$ (p, q は定数) である等差数列の初項と公差を求めてください.

$\boxed{\text{解答 1}}$　$a_1 = p + q$ と $a_2 = 2p + q$ より，$a_2 - a_1 = (2p + q) - (p + q) = p$ になる. よって，初項 $a = p + q$，公差 $d = p$ になる.

$\boxed{\text{問題 2}}$　初項 3，公比 2 の等比数列の一般項とその第 5 項を求めてください．また，その第 n 項までの和を求めて下さい.

$\boxed{\text{解答 2}}$　公式に当てはめて一般項は

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

になります．よって，第 5 項は

$$a_5 = 3 \cdot 2^{5-1} = 3 \cdot 2^4 = 3 \cdot 16 = 48$$

になります．また，その和は次になります.

$$S_n = \frac{3 \cdot (1 - 2^n)}{1 - 2} = 3(2^n - 1)$$

$\boxed{\text{問題 3}}$　$\sum_{i=1}^{3}(i + 1) = \sum_{j=2}^{4} j$ を示してください.

$\boxed{\text{解答 3}}$　下の式より両者は等しい.

$$\sum_{i=1}^{3}(i + 1) = (1 + 1) + (2 + 1) + (3 + 1) = 2 + 3 + 4, \quad \sum_{j=2}^{4} j = 2 + 3 + 4$$

$\boxed{\text{問題 4}}$　数列 x_1, x_2, x_3 と y_1, y_2 の積 $x_i y_j$ の和を考えたときに，$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} x_i y_j = \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{3} x_i y_j$ を示してください.

$\boxed{\text{解答 4}}$　最初に左辺は

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} x_i y_j = \sum_{i=1}^{3}(x_i y_1 + x_i y_2) = (x_1 y_1 + x_1 y_2) + (x_2 y_1 + x_2 y_2) + (x_3 y_1 + x_3 y_2)$$

となる．また，右辺は

$$\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{3} x_i y_j = \sum_{j=1}^{2}(x_1y_j + x_2y_j + x_3y_j) = (x_1y_1 + x_2y_1 + x_3y_1) + (x_1y_2 + x_2y_2 + x_3y_2)$$

となる．2 つの等式の最右辺を比較すると，両者は等しいことが分かる．

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} x_i y_j = \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{3} x_i y_j$$

問題 5　1 年目 1 円と 2 年目 1 円が得られるキャッシュフローの割引率 r での割引現在価値を求めて下さい．次に (11) 式に当てはめて計算して下さい．

解答 5　キャッシュフローの割引現在価値は

$$PV = \frac{1}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2} = \frac{1}{1+r}\cdot\left(1 + \frac{1}{1+r}\right) = \frac{2+r}{(1+r)^2}$$

となる．(11) 式の割引率 r を用いた n 年間のキャッシュフローの割引現在価値

$$PV = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right)$$

を適用すると下記の最右辺の式は上の式に等しくなる．

$$\frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^2}\right) = \frac{1}{r}\left(\frac{(1+r)^2}{(1+r)^2} - \frac{1}{(1+r)^2}\right) = \frac{1}{r}\left(\frac{2r+r^2}{(1+r)^2}\right) = \frac{2+r}{(1+r)^2}$$

問題 6　例 10 より，初任給 1 円から毎年昇給するとしましょう．昇給率 g は一定で複利と同じ方式で昇給します．n 年間勤めた後の給料のキャッシュフローの割引現在価値の和は $(1-((1+g)/(1+r))^n)/(r-g)$ になることを示してください．ただし，$r > g$ とします．

解答 6　来年以降の所得のキャッシュフローは

$$1, 1+g, (1+g)^2, \ldots$$

である．これらに $1/(1+r)$ を乗じて行くと各期の給与の割引現在価値が

$$\frac{1}{1+r},\ \frac{1+g}{(1+r)^2},\ \frac{(1+g)^2}{(1+r)^3},\ \ldots$$

となる．これは初項 $1/(1+r)$，公比 $(1+g)/(1+r)$ の等比数列である．よって，n 年間のその割引現在価値の和は，等比数列の和の公式より下記になる．

$$PV = \frac{1}{1+r}\frac{1-\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^n}{1-\frac{1+g}{1+r}} = \frac{1-\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^n}{r-g}$$

問題 7　練習問題 6 の続きです．給与が 1 円から昇給率 g で無限に上昇していく場合の割引現在価値の和は $1/(r-g)$ になることを示してください．

解答 7　練習問題 6 の答えから公比は

$$\frac{1+g}{1+r} < 1$$

なので極限が存在する．それは

$$\lim_{n\to\infty} PV = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^n}{r-g} = \frac{1-0}{r-g} = \frac{1}{r-g}$$

となる．ちなみに，この式はゴードンの公式と呼ばれており，配当を元にした株価の理論値として知られている．

第8章　練習問題解答

$\boxed{\textbf{問題 1}}$　1 年目の収益率 2%，2 年目の収益率 5%，3 年目の収益率 −2% の資産の平均収益率を求めて下さい．$1.05^{1/3} \simeq 1.0164$ の近似を用いて下さい．

$\boxed{\textbf{解答 1}}$　3 年間の収益の積は

$$(1+0.02)(1+0.05)(1-0.02) = 1.02 \times 1.05 \times 0.98 = 1.04958$$

なので 1.05 を近似として使う．

$$1.05^{1/3} - 1 = 1.0164 - 1 = 0.0164$$

から約 1.64% となる．

$\boxed{\textbf{問題 2}}$　$y = e^x$ と $y = e^{-x}$ のグラフは y 軸に関して対称であることを示して下さい．

$\boxed{\textbf{解答 2}}$　問題の関数を $f(x) = e^x$ と $g(x) = e^{-x}$ とすると

$$f(x) = e^x = e^{(-1)\cdot(-x)} = e^{-(-x)} = g(-x)$$

になる．よって，$f(x) = g(-x)$ から両関数のグラフは y 軸に関して線対称である．

$\boxed{\textbf{問題 3}}$　次の計算を行って下さい．$\log_4 8 + \log_4 32$

$\boxed{\textbf{解答 3}}$

$$\log_4 8 + \log_4 32 = \log_4 8 \cdot 32 = \log_4 2^3 \cdot 2^5 = \log_4 2^8 = \log_4 (2^2)^4 = \log_4 4^4 = 4$$

$\boxed{\textbf{問題 4}}$　次の計算を行って下さい．$\frac{1}{2}\log_3 9 - \log_3 12 + 2\log_3 6$

$\boxed{\textbf{解答 4}}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\log_3 9 - \log_3 12 + 2\log_3 6 &= \log_3 9^{1/2} - \log_3 3 \cdot 2^2 + \log_3 6^2 \\ &= \log_3 3 - \log_3 3 \cdot 2^2 + \log_3 (2 \cdot 3)^2 = \log_3 \frac{3 \cdot (2 \cdot 3)^2}{3 \cdot 2^2} = \log_3 3^2 = 2\end{aligned}$$

問題 5　次を簡単にして下さい．$\log_2 3 \cdot \log_3 16$

解答 5　底の変換公式より

$$\log_2 3 \cdot \log_3 16 = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$$

問題 6　底の変換公式から (6) を証明してください．

解答 6　底の変換公式より

$$\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x$$

から a と b を交換して，$\log_b a$ で割ると

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

になる．上の底の変換公式に b に x を代入すると，(6) が求まる．

$$\log_a x = \frac{\log_x x}{\log_x a} = \frac{1}{\log_x a}$$

問題 7　金利が 0.1% で 10 万円が 11 万円になるには何年かかるのでしょうか？ただし，$\log 1.1 = 0.09531$, $\log 1.001 = 0.001$ とします．

解答 7

$$年数 = \log_{1+0.001} \frac{110000}{100000} = \log_{1.001} 1.1 = \frac{\log 1.1}{\log 1.001} \simeq \frac{0.09531}{0.001} = 95.31$$

より約 95 年掛ります．

第9章　練習問題解答

問題 1　次の関数を微分してください.　(1)　$3x^8+8x^{12}$　(2)　$12x^{99}+20$

解答 1

(1)　$(3x^8+8x^{12})'=(3x^8)'+(8x^{12})'=3(x^8)'+8(x^{12})'=3\cdot 8\cdot x^{8-1}+8\cdot 12\cdot x^{12-1}$
$=3\cdot 8\cdot x^7+8\cdot 12\cdot x^{11}=24x^7+96x^{11}$

(2)　$(12x^{99}+20)'=(12x^{99})'+(20)'=12(x^{99})'+0=12\cdot 99x^{98}=1188x^{98}$

問題 2　費用関数 $C(Q)=Q^3-4Q^2+7Q+64$ を Q で微分してください.

解答 2

$$
\begin{aligned}
C'(Q)&=(Q^3-4Q^2+7Q+64)'=(Q^3)'-4(Q^2)'+7(Q)'+(64)'\\
&=3Q^{3-1}-4\cdot 2Q^{2-1}+7\cdot 1+0=3Q^2-8Q+7
\end{aligned}
$$

問題 3　和の法則を微分の定義から証明してください.

解答 3

$$
\begin{aligned}
(f(x)+g(x))'&=\lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\
&=f'(x)+g'(x)
\end{aligned}
$$

第10章　練習問題解答

問題 1　一辺の長さが 2.01 の正方形の面積を，例 2 を参考にして近似して下さい．

解答 1　例 2 と同様に $x_0 = 2$ で $\Delta x = 0.01$ から，その面積は 4.04 になる．

$$x^2 \simeq x_0^2 + 2x_0\Delta x = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 0.01 = 4.04$$

問題 2　積の微分 $(fg)' = f'g + fg'$ を証明してください．

解答 2　関数 fg に対して微分の定義式を当てはめて，分子に $f(x)g(x+h)$ を引いて足すと以下になる．

$$\begin{aligned}
(fg)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h) - f(x))g(x+h)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x)(g(x+h) - g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h) - f(x))}{h} \lim_{h\to 0} g(x+h) + f(x) \lim_{h\to 0} \frac{(g(x+h) - g(x))}{h} \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)
\end{aligned}$$

問題 3　商 f/g の微分の公式を積の微分から導いて下さい．

解答 3　h を

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \tag{1}$$

とおいてその微分 h' が存在するとする．これを変形し $f(x) = g(x)h(x)$ とし，f に積の微分の公式を適応する．

$$f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$$

これを $h'(x)$ について解く．

$$h'(x) = \frac{f'(x) - g'(x)h(x)}{g(x)}$$

となる．右辺の $h(x)$ に (1) 式を代入した結果が公式になる．

$$h'(x) = \frac{f'(x) - g'(x)\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$$

問題 4　費用関数が $C(Q) = Q^3 - 4Q^2 + 7Q + 64$ のときの次の費用を求めて下さい．　(1)　固定費用 FC　(2)　可変費用 VC　(3)　平均費用 AC　(4)　平均可変費用 AVC　(5)　限界費用 MC

解答 4　(1)　$FC = 64$　(2)　$VC = Q^3 - 4Q^2 + 7Q$

$$\begin{aligned}
&(3)\ \ AC = \frac{C(Q)}{Q} = \frac{Q^3 - 4Q^2 + 7Q + 64}{Q} = Q^2 - 4Q + 7 + \frac{64}{Q} \\
&(4)\ \ AVC = \frac{VC}{Q} = \frac{Q^3 - 4Q^2 + 7Q}{Q} = Q^2 - 4Q + 7 \\
&(5)\ \ MC = C'(Q) = \frac{dC(Q)}{dQ} = (Q^3 - 4Q^2 + 7Q + 64)' = 3Q^2 - 8Q + 7
\end{aligned}$$

問題 5　$ax + \dfrac{b}{x}$ を微分して下さい．

解答 5

$$\left(ax + \frac{b}{x}\right)' = a(x)' + b\left(\frac{1}{x}\right)' = a + b \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = a - \frac{b}{x^2}$$

問題 6　練習 4 の費用関数の増減を調べて下さい．

解答 6　練習 4 の答えの $C'(Q) = 2Q^2 - 8Q + 7$ から $C'(Q) = 0$ の方程式

$$2Q^2 - 8Q + 7 = 0$$

を考える．第 6 章の判別式と 2 次関数のグラフの関係およびこの判別式の符号は，

$$D' = (-4)^2 - 3 \cdot 7 = -5 < 0$$

常に負であることにより $C'(Q) > 0$ が分かる．よって，定理 2 より費用関数 C はすべての生産量について単調増加関数である．

第11章　練習問題解答

$\boxed{\textbf{問題 1}}$　逆関数定理を，関数と逆関数の合成関数が恒等関数になる $f^{-1}(f(x)) = x$ ことを用いて証明してください．

$\boxed{\textbf{解答 1}}$　関数と逆関数の合成関数 $f^{-1}(f(x)) = x$ の両辺をそれぞれ微分する．

$$\text{左辺} = \frac{d}{dx} f^{-1}(f(x)) = (f^{-1})'(y) \cdot f'(x) \qquad (\text{連鎖律} \quad \& \quad y = f(x))$$
$$\text{右辺} = \frac{d}{dx} x = 1$$

よって，左辺と右辺を等しくする関係は下になる．

$$(f^{-1})'(y) \cdot f'(x) = 1$$

両辺を $f'(x)$ $(\neq 0)$ で割ると公式が成り立つ．

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

$\boxed{\textbf{問題 2}}$　弾力性と対数関数の微分の関係 $d\log y/d\log x = dy/dx \cdot x/y$ を $z = \log y$ と $x = e^t$ とおいて，連鎖律 $dz/dy \cdot dy/dx \cdot dx/dt$ を用いて証明して下さい．

$\boxed{\textbf{解答 2}}$　$x = e^t$ から $t = \log x$ である．さらに，$z = \log y$ から

$$\frac{d\log y}{d\log x} = \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} \tag{1}$$

となる．ここで最右辺は連鎖律を 2 回用いている．最右辺は

$$\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = (\log y)'\frac{dy}{dx}(e^t)' = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}e^t = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}x = \frac{dy}{dx}\frac{x}{y}$$

この最右辺と (1) 式の最左辺は等しいので，下が成り立つ．

$$\frac{d\log y}{d\log x} = \frac{dy}{dx}\frac{x}{y} = \frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx}{x}}$$

$\boxed{\textbf{問題 3}}$　費用関数が $C(Q) = Q^3 - 4Q^2 + 7Q + 64$ のとき各種の曲線を同じ図に描いて下さい．　(1)　AC　　(2)　AVC　　(3)　MC

解答 3　各種の費用関数は前章の練習問題 4 で求められている．まずは簡単な限界費用と平均可変費用が一致する水準を求める．

$$MC = AVC \iff 3Q^2 - 8Q + 7 = Q^2 - 4Q + 7 \iff 2Q(Q-2) = 0$$

限界費用曲線と平均可変費用曲線は $Q = 0, 2$ で交わる．また，

$$\begin{aligned} &MC'(Q) = (3Q^2 - 8Q + 7)' = 6Q - 8 \\ &MC'(Q) = 0 \iff Q = \frac{4}{3} \\ &MC''(Q) = 6 > 0 \\ &AVC'(Q) = (Q^2 - 4Q + 7)' = 2Q - 4 \\ &AVC'(Q) = 0 \iff Q = 2 \\ &AVC''(Q) = 2 > 0 \end{aligned}$$

なので，限界費用曲線の最小点 $Q = 4/3$ は，平均可変費用曲線の最小点 $Q = 2$ よりも左に位置することが分かる．さらに，上の計算で $Q = 2$ の時に平均可変費用曲線の最低点を限界費用曲線は通る．

次に，限界費用と平均費用が一致する生産量を求める．

$$MC = AC \iff 3Q^2 - 8Q + 7 = Q^2 - 4Q + 7 + \frac{64}{Q} \iff 2Q^3 - 4Q^2 - 64 = 0$$

この右辺の式を

$$f(Q) = 2Q^3 - 4Q^2 - 64$$

と置く．ここで剰余の定理を思い出して

$$f(4) = 2 \cdot 4^3 - 4 \cdot 4^2 - 64 = 128 - 64 - 64 = 0$$

となるから，$Q - 4$ で因数分解ができる．組み立て除法を用いて

$$\begin{array}{r|rrrr} 4 & 2 & -4 & 0 & -64 \\ & & 8 & 16 & 64 \\ \hline & 2 & 4 & 16 & 0 \end{array}$$

となる．結局以下のように因数分解ができる．

$$2(Q-4)(Q^2 + 2Q + 8) = 0$$

ここで $Q^2 + 2Q + 8 = 0$ の判別式は，$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = -28 < 0$ となる．よって，$Q^2 + 2Q + 8 = 0$ を満たす実数 Q は存在しない．よって，限界費用曲線と平均費用曲線は $Q = 4$ のみで交わります．もちろん，その点は平均費用曲線の最低点です．その時の費用額は $MC(4) = 23$ になる．

$$MC(4) = 3 \cdot 4^2 - 8 \cdot 4 + 7 = 48 - 32 + 7 = 23$$

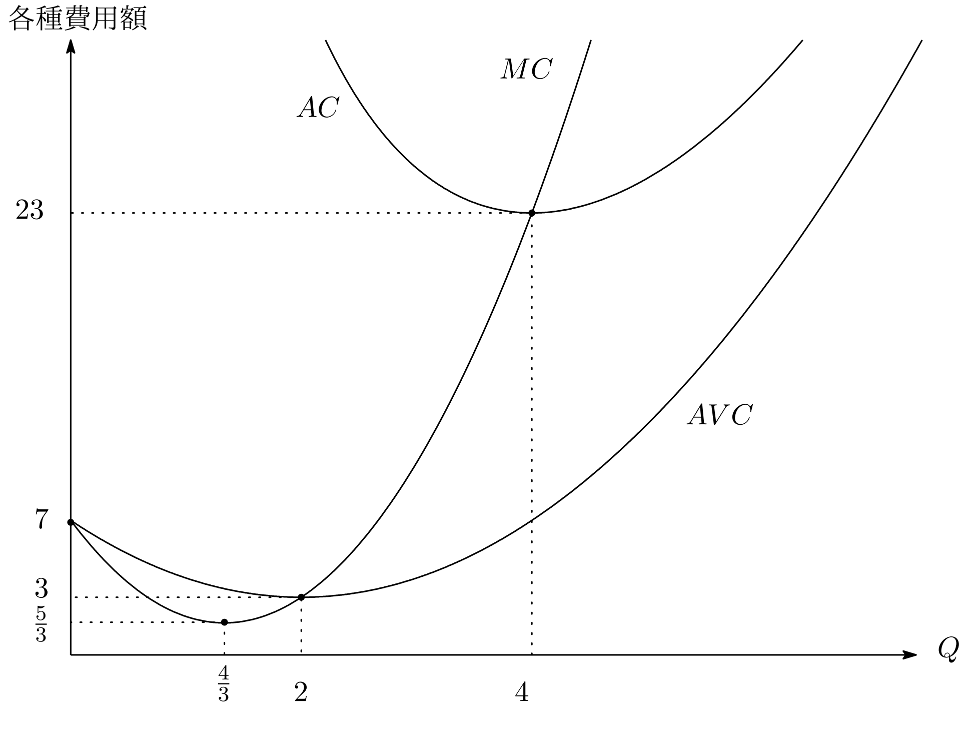
平均費用曲線の生産量が限りなく大きくなる時と 0 に近づく時の振る舞いを調べます．関数の極限を思い出して，

$$\lim_{Q\to\infty}\frac{64}{Q}=0$$

となるので，Q が無限大の時の平均費用曲線の漸近線は，平均可変費用曲線となる．さらに，Q が 0 に限りなく近づくと無限大に発散することが分かる．

$$\lim_{Q\to 0}AC(Q)=\lim_{Q\to 0}\left(Q^2-4Q+7+\frac{64}{Q}\right)=\infty$$

以上の考察と $MC(4/3)=5/3$ より各種曲線が図に描けます．



$\boxed{\textbf{問題 4}}$ 問い 1 と問い 12 を参考にして，関数 $y=f(x)=e^{-x^2}$ のグラフを描いて下さい．

$\boxed{\text{解答 4}}$ 下より f のグラフは，y 軸に関して対称に $(f(-x)=f(x))$ なる．

$$f(-x)=e^{-(-x)^2}=e^{-x^2}=f(x)$$

よって，$x\geq 0$ の範囲で考えれば良い．問い 1，12 より，

$$f'(x)=-2xe^{-x^2},\qquad f''(x)=2(2x^2-1)e^{-x^2}$$

なので，よって

$$f'(0)=0,\qquad f''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0$$

が分かる．その値は

$$f(0) = 1, \qquad f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

となる．また，

$$f'(0) = 0, \qquad f''(0) = 2(2 \cdot 0^2 - 1)e^{-0^2} = -2 < 0$$

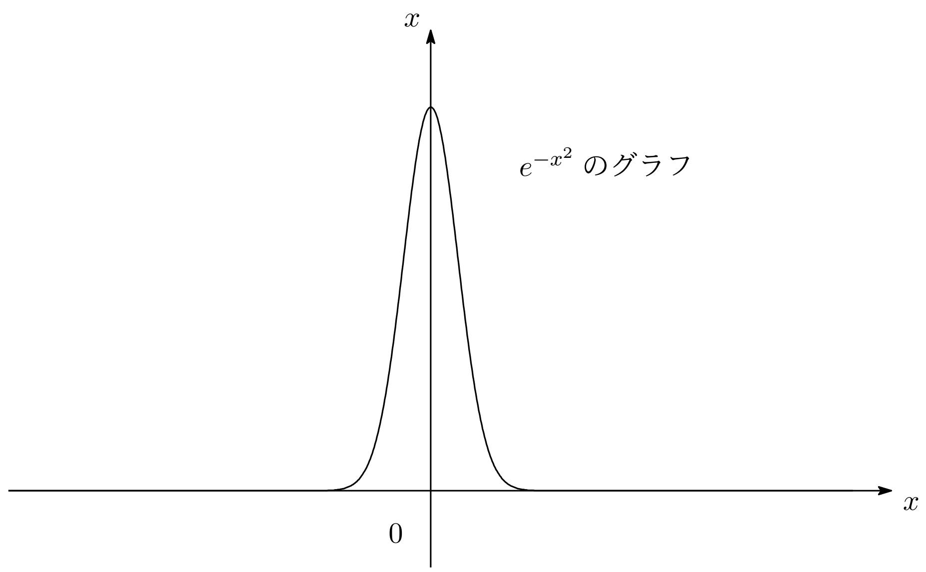
より $x = 0$ で傾きが 0 だが，グラフの形状は上に凸になっている．また，

$$\lim_{x \to \infty} e^{-x^2} = 0$$

より x 軸が漸近線になる．以上をまとめると以下の増減表にまとめられる．

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		∞
y'		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
y''		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
y	0	$\nearrow$	$-\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\searrow$	0

　これらの情報から下記のようなグラフになる．これに似た正規分布といわれるグラフは統計学や計量経済学で良く出てきますので覚えておくとよいだろう．



問題 5　1 種類の生産要素労働 L を用いる生産関数 $Y = F(L) = \sqrt{2L}$ で最適な雇用量は 2 階の条件を満たしていることを示して下さい．

解答 5　最適な雇用量は前章の例 10 から $L^* = p^2/2w^2$ であり，利潤の 1 階微分は前章の (7) の $p/\sqrt{2L} - w$ である．その 2 階微分は

$$\frac{d^2\pi}{dL^2}(L) = \left(p\frac{1}{\sqrt{2L}} - w\right)' = \left(p(2L)^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{p}{2} \cdot 2(2L)^{-\frac{3}{2}} = -p(2L)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{p}{\sqrt{(2L)^3}}$$

となる．よって，$d^2\pi/dL^2(L^*) = -w^3/p^2 < 0$ となり 2 階の条件が満たされている．端点 $L = 0$ では明らかに利潤は 0 なので L^* が最適な雇用量となる．

問題 6　$f(x) = x^3$ と $g(x) = -x^3$ は極値をもたないことを示してください．

解答 6　$f'(x) = 3x^2$ より $x = 0$ のとき $f'(0) = 0$ となる．しかし，$f''(x) = 6x$ から $f''(0) = 0$ となり「極大・極小の 2 階の条件」は適用できない．ここで $x \neq 0$ ならば $f'(x) > 0$ であり，前章の定理 2 より，区間 $(-\infty, 0)$ と区間 $(0, \infty)$ で単調増加になる．よって，極値をもたない．

同様に $g'(x) = -3x^2$ より $x = 0$ のとき $g'(0) = 0$ となる．$g''(x) = -6x$ から $g''(0) = 0$ となる．しかし，$x \neq 0$ ならば $g'(x) < 0$ であり，区間 $(-\infty, 0)$ と区間 $(0, \infty)$ で単調減少になる．よって，極値をもたない．

問題 7　費用関数 $C(x) = 10 + x^2/2$ の平均費用が最低になる生産量を，微分を用いて求めてください．

解答 7　平均費用関数とその 1 階と 2 階微分は

$$
\begin{aligned}
AC(x) &= \frac{C(x)}{x} = \frac{10 + x^2/2}{x} = \frac{10}{x} + \frac{x}{2} \\
AC'(x) &= \left(\frac{10}{x} + \frac{x}{2}\right)' = -\frac{10}{x^2} + \frac{1}{2} \\
AC''(x) &= \left(-\frac{10}{x^2} + \frac{1}{2}\right)' = -(-2) \cdot \frac{10}{x^3} = \frac{20}{x^3}
\end{aligned}
$$

となる．$AC'(x) = 0$ を解くと，解は下に計算されるように $x^e = 2\sqrt{5}$ となる．

$$
AC'(x^e) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{10}{(x^e)^2} + \frac{1}{2} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x^e)^2 = 20 \quad \Longleftrightarrow \quad x^e = 2\sqrt{5}
$$

下記のように 2 階微分が正になるので，$x^e = 2\sqrt{5}$ で平均費用は最低になる．

$$
AC''(x^e) = \frac{20}{(x^e)^3} = \frac{20}{(2\sqrt{5})^3} = \frac{20}{2^3 \cdot 5 \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} > 0
$$

問題 8　効用 $u(x) = -x^2/2 + x$ から費用 $C(x) = x^2/2$ を差し引いた額を総余剰 $W(x)$ とします．その最大点を求め，2 階の条件を確認してください．

解答 8　総余剰とその 1 階と 2 階微分は下記になる．

$$
\begin{aligned}
W(x) &= u(x) - C(x) = \left(-\frac{x^2}{2} + x\right) - \frac{x^2}{2} = -x^2 + x \\
W'(x) &= \left(-x^2 + x\right)' = -2x + 1 \\
W''(x) &= (-2x + 1)' = -2 < 0
\end{aligned}
$$

$W'(x^*) = 0$ を解くと，2 階の条件は成り立っているので $x^* = 1/2$ は最大点である．

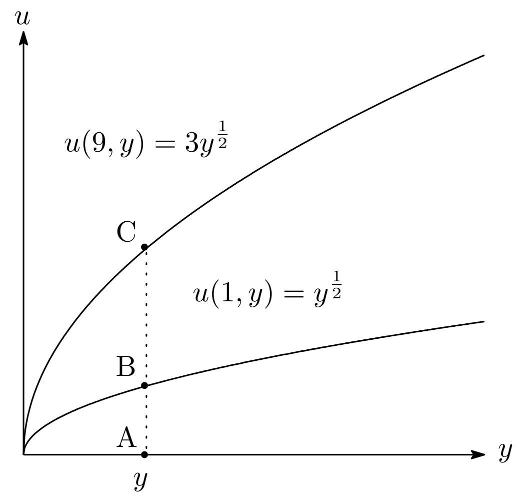
第12章　練習問題解答

問題 1　$x=9$ に固定されているときの効用関数 (4) のグラフを yu 平面上に描いてください．$u(1,y)$ のグラフとどのような位置関係にありますか？

解答 1　効用関数 $u(x,y)=\sqrt{x}\sqrt{y}$ のそれぞれ $x=9,1$ に固定されているとき，

$$u(9,y)=3y^{\frac{1}{2}}, \qquad u(1,y)=y^{\frac{1}{2}}$$

変数 y に関する効用関数 u のグラフが描かれている．



AC の長さは AB の長さの 3 倍になっているように，前者のグラフは後者のグラフを 3 倍上方にシフトしている形になっている．

問題 2　財の量が $(1,1)$ と $(9,1)$ のときの効用関数 (4) 式の y 財の限界効用の値を求めてください．

解答 2　問い 4 より y 財の限界効用は

$$MU_y=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}$$

なので，これらの点での y 財の限界効用は下になる．

$$MU_y(1,1)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{1}}=\frac{1}{2}, \qquad MU_y(9,1)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{1}}=\frac{1}{2}\cdot 3=\frac{3}{2}$$

問題 3　関数 $f(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ を各変数の 1 階と 2 階の偏導関数を求めてください．

解答 3

$$
\begin{aligned}
f_x &= \frac{\partial f}{\partial x} = (\sqrt{x})' = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2}, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = (\sqrt{y})' = \frac{y^{-\frac{1}{2}}}{2} \\
f_{xy} &= \frac{\partial f_x}{\partial y} = 0, \qquad f_{yx} = \frac{\partial f_y}{\partial x} = 0 \\
f_{xx} &= \frac{\partial f_x}{\partial x} = \left(\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2}\right)' = \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{x^{-\frac{1}{2}-1}}{2} = -\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{4} \\
f_{yy} &= \frac{\partial f_y}{\partial y} = \left(\frac{y^{-\frac{1}{2}}}{2}\right)' = \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{y^{-\frac{1}{2}-1}}{2} = -\frac{y^{-\frac{3}{2}}}{4}
\end{aligned}
$$

問題 4　x 財と y 財を消費するある消費者の効用関数が $u(x,y) = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$ で与えられているとします．x 財と y 財の限界効用を求めてください．次に，限界効用逓減の法則が成り立っていることを示してください．

解答 4　与えられた式を各々の変数で偏微分すると限界効用が得られる．

$$
MU_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}, \qquad MU_y = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}}
$$

さらに偏微分するとその符号は負になり，限界効用逓減の法則が成り立っている．

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial MU_x}{\partial x} = \left(-\frac{2}{3}\right)\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}-1}y^{\frac{2}{3}} = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}y^{\frac{2}{3}} < 0, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial MU_y}{\partial y} = \left(-\frac{1}{3}\right)\frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}-1} = -\frac{2}{9}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{4}{3}} < 0
\end{aligned}
$$

問題 5　資本の限界生産物の (9) 式が逓減することを示してください．

解答 5　仮定 $\alpha < 1$ より下記がなり立つ．

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} &= \frac{\partial MPK}{\partial K} = \left(A\alpha K^{\alpha-1}L^{1-\alpha}\right)' = A\alpha L^{1-\alpha}\left(K^{\alpha-1}\right)' = A\alpha L^{1-\alpha}(\alpha-1)K^{\alpha-1-1} \\
&= -A\alpha(1-\alpha)K^{\alpha-2}L^{1-\alpha} < 0
\end{aligned}
$$

第 13 章　練習問題解答

$\boxed{\textbf{問題 1}}$　効用関数 $u = u(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ の全微分を求めてください．

$\boxed{\textbf{解答 1}}$　第 12 章の練習問題 $\boxed{3}$ から，効用関数を偏微分すると，

$$u_x(x, y) = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2}, \qquad u_y(x, y) = \frac{y^{-\frac{1}{2}}}{2}$$

となる．よって，全微分は下になる．

$$du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx + \frac{1}{2\sqrt{y}}dy$$

$\boxed{\textbf{問題 2}}$　$\boxed{1}$ の効用関数の限界代替率を求めてください．

$\boxed{\textbf{解答 2}}$　$MRS = u_x/u_y$ より，下記となる．

$$MRS = \frac{\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2}}{\frac{y^{-\frac{1}{2}}}{2}} = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

$\boxed{\textbf{問題 3}}$　$\boxed{1}$ の効用関数を持つ消費者の予算制約 $p_x x + p_y y = m$ の下での最適な消費を求めてください．

$\boxed{\textbf{解答 3}}$　最適消費の条件 3 の $MRS = p_x/p_y$ と $\boxed{2}$ の答えより

$$\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = \frac{p_x}{p_y}$$

となる．2 乗して

$$p_y y = \frac{p_x^2 x}{p_y}$$

を予算制約式に代入すると，

$$p_x x + \frac{p_x^2 x}{p_y} = m$$

となる．これを x について解くと

$$x^* = \frac{mp_y}{p_x(p_x + p_y)}$$

となる．これを予算制約式に代入して y が求まる．

$$y^* = \frac{mp_x}{p_y(p_x + p_y)}$$

問題 4　$\boxed{1}$ の効用関数は限界代替率逓減の法則を満たしていることを示してください．

解答 4　ある効用 $\overline{u} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ を固定して，$\boxed{1}$ の解答の $MRS = \sqrt{y}/\sqrt{x}$ に $\sqrt{y} = \overline{u} - \sqrt{x}$ を代入する．これを x について微分すると，商の微分の公式を用いて

$$\begin{aligned}
\frac{dMRS}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\overline{u} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right) = \frac{(\overline{u} - \sqrt{x})' \cdot \sqrt{x} - (\overline{u} - \sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} \\
&= \frac{-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} - (\overline{u} - x^{\frac{1}{2}}) \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{x} = -\frac{x^0 + (\overline{u} - x^{\frac{1}{2}})x^{-\frac{1}{2}}}{2x} \\
&= -\frac{1 + (\overline{u}x^{-\frac{1}{2}} - x^0)}{2x} = -\frac{1 + (\overline{u}x^{-\frac{1}{2}} - 1)}{2x} = -\frac{\overline{u}x^{-\frac{1}{2}}}{2x} \\
&= -\frac{\overline{u}}{2x^{3/2}}
\end{aligned}$$

となる．関数形から $\overline{u} > 0$ より $dMRS/dx < 0$ となり，限界代替率逓減の法則が成り立っている．

問題 5　問い 1 の効用関数 $u(x, y) = xy$ を持っている消費者の最適な消費を求め，限界代替率逓減の法則がなりたっていることを確かめて下さい．

解答 5　無差別曲線の傾きの大きさは，問い 1 の答えから

$$|y'| = \left|-\frac{\overline{u}}{x^2}\right| = \left|-\frac{y}{x}\right| = \frac{y}{x}$$

となる．最適消費の条件 3 より

$$\frac{y}{x} = \frac{p_x}{p_y}$$

となり，$p_x x = p_y y$ を予算制約式に代入して，

$$p_x x + p_y y = m \quad \Longleftrightarrow \quad p_x x + p_x x = m \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{m}{2p_x}$$

となり，最適な消費は $(x^*, y^*) = (m/2p_x, m/2p_y)$ となる．問い 1 の答えより $MRS = \overline{u}/x^2$ から下記のように限界代替率逓減の法則が成り立っている．

$$\frac{dMRS}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{\overline{u}}{x^2} = -\frac{2\overline{u}}{x^3} < 0$$