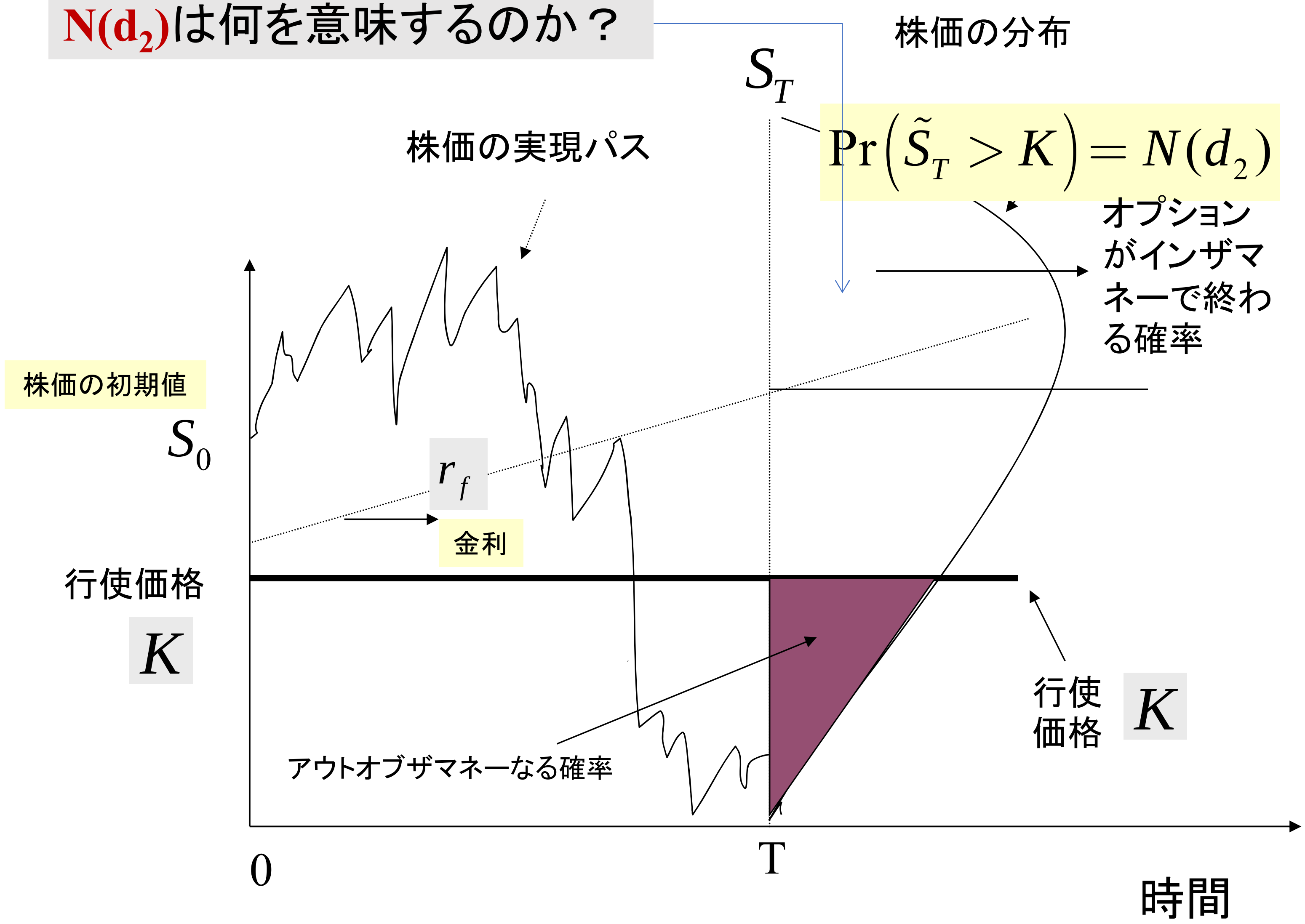
第4章　確率微分方程式とブラック＝ショールズモデル

式(4.16)と式(4.17)の導出

森平　爽一郎

ブラック＝ショールズ式の
直感的理解については下記を参照のこと

$N(d_2)$は何を意味するのか？



式(4.16) の導出
BS式右辺第2項：N(d2)の意味

満期の株価S_Tが
行使価格Kを超える
リスク中立確率

$$\Pr{}^{\mathbf{Q}}\left(\tilde{S}_T > K \middle| S_0\right) = \Pr{}^{\mathbf{Q}}\left(\ln \tilde{S}_T > \ln K \middle| \ln S_0\right)$$

両辺の対数をとる。不等号は変わらない。対数変換は単調変換だから。

$$= \Pr{}^{\mathbf{Q}}\left(\ln S_0 + \left(r_F - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\tilde{\varepsilon}\sqrt{T} > \ln K\right)$$

$$\tilde{S}_T = S_0 e^{\left(r_F - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\tilde{\varepsilon}\sqrt{T}}$$

株価の確率微分方程式を解いて，
両辺の対数をとった結果

$$= \Pr{}^{\mathbf{Q}}\left(\tilde{\varepsilon} > \frac{-\ln S_0 + \ln K - \left(r_F - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

注意：

1. ε は平均ゼロ,標準偏差1の正規分布する。
2. ゼロを中心として対称。不等号の変換に注意

$$= \Pr{}^{\mathbf{Q}}\left(\tilde{\varepsilon} < \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r_F - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

$$= N\left(d_2\right)$$

$$d_2 \equiv \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r_F - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$ の定義は

続き　$d_2, N(d_2)$ の意味を明らかにする

分子＝オプションがインザマネー（ITM)になっている時の期待利益

$$\frac{-\ln S_0 + \ln K - \left(r_F - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = -\frac{\ln S_0 + \left(r_F - \frac{\sigma^2}{2}\right)T - \ln K}{\sigma\sqrt{T}}$$

満期の株価の期待値

対数表示の行使価格

$$\boxed{d_2 \equiv \left(\frac{\log_e\left(S_0 e^{\left(r_f - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} \right) - \log_e(K)}{\sigma\sqrt{T}} \right) = 0} \qquad \Rightarrow N(d_2)$$

分母＝満期T時点での株価のリスク（ボラティリティ）で基準化している

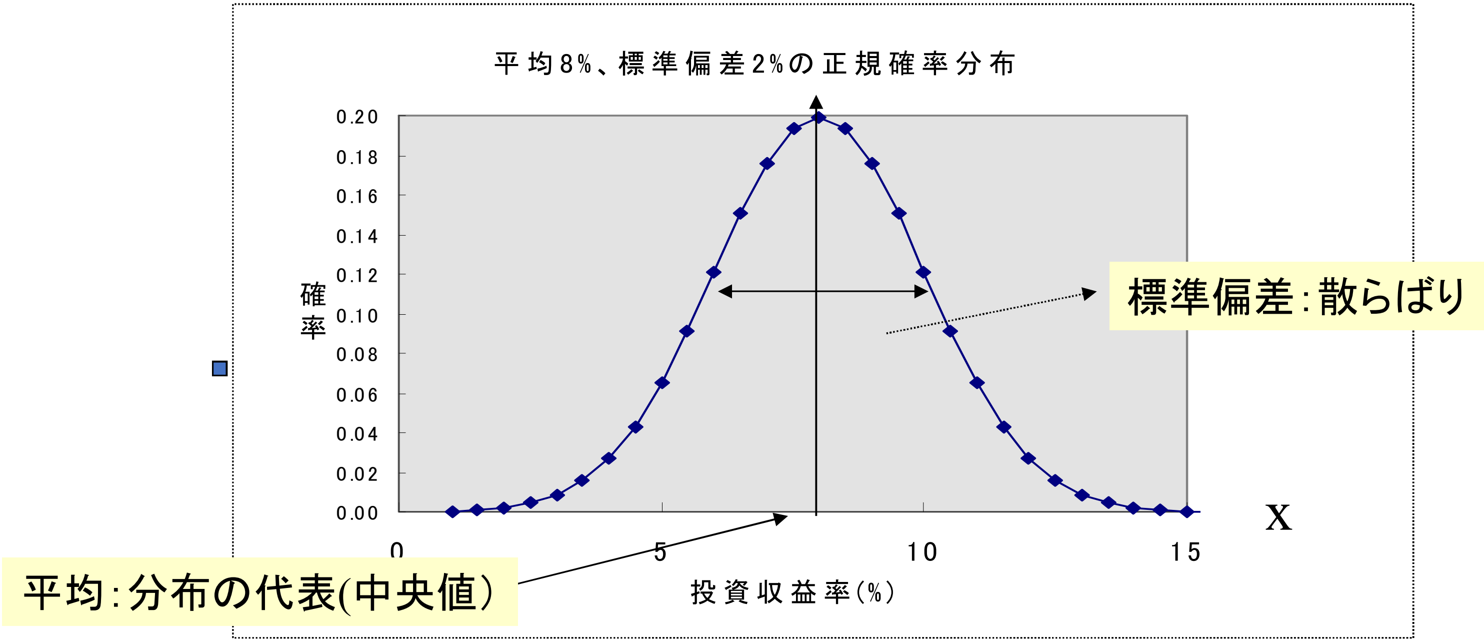
式(4.17)の導出

$$
\begin{aligned}
N\left(d_2\right) &= \Pr^{\mathbf{Q}}\left(\tilde{S}_T > K\right) \\
&= 1 - \Pr^{\mathbf{Q}}\left(\tilde{S}_T \leq K\right) \\
&= N\left(-d_2\right)
\end{aligned}
$$

標準正規分布に従う確率変数zの密度関数と分布関数を描いて考えてみよう

正規分布

平均μ、標準偏差σの正規分布に従う確率変数(投資収益率)：xがあったとすると、



正規分布：続き

- 分布の面積は１：すべての出来事の起きる確率は100％
- 正規分布する確率変数ｘを基準化する：ｘからその平均μを引き、結果を標準偏差σでわったものを「標準」正規確率変数という。その結果は、平均ゼロ、分散１の標準正規分布になる。

標準化、基準化する

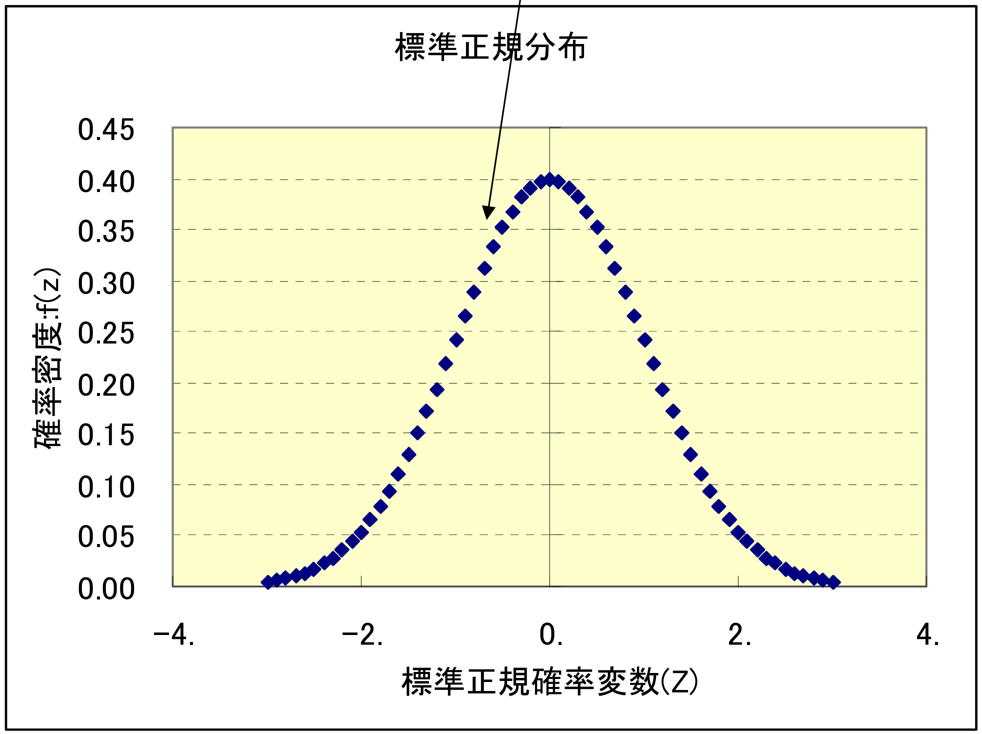
$$z \equiv \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow N(0,1)$$

標準正規密度関数n(z)と分布関数N(d_1)

は　平均がゼロ、分散(標準偏差)が1の正規分布をする

この曲線の下の面積は「１」
⇔　すべてのことが起きる確率は１

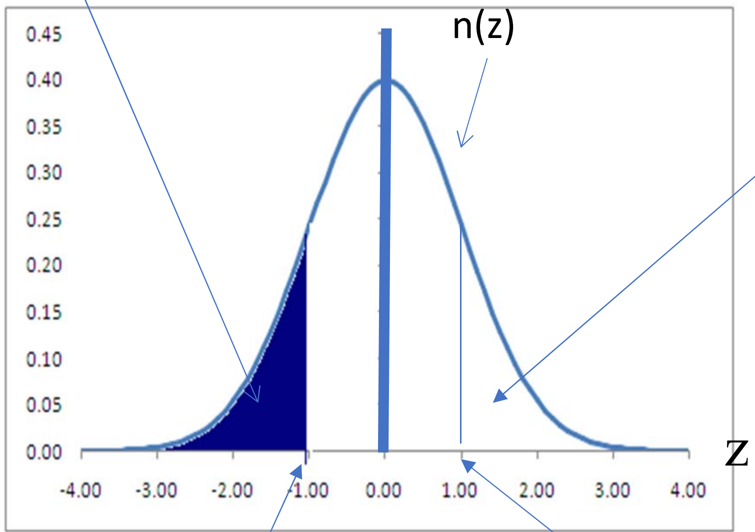
標準正規分布は、平均ゼロを境にした、左右対称
ゼロ以上とゼロ以下の面積は、
1/2=0.5



ある事象（Event)が起きる確率

$$\Pr\left(\tilde{z} \le -d_2\right) = \boxed{N\left(-d_2\right)} = 1 - \Pr\left(\tilde{z} \le d_2\right) = \underbrace{\boxed{1 - N\left(d_2\right)}}$$

は標準正規分布に従う確率変数
zが－d_2より小さい値をとる確率
をあらわす



$-d_2$=-1

d_2=+1

1. 標準正規分布は平均ゼロを軸にして対称な分布なので、
2. 確率変数zが-d2以下になる面積（確率）と
3. 確率変数zが＋d_2以上になる面積（確率）は
4. 等しいことがわかる