

補論 B

離散選択モデル

離散選択 (discrete choice) モデルは、通常、計量経済学で教わりますが、モデルの経済学的な普遍性が不明確な場合があります。需要だけでなく、不完全競争市場で企業が付ける最適価格を組み込んだ場合は、とくにそうなります。こうした場合は、需要量や価格を相互に矛盾しない方法で導くことが求められます。この補論 B では、このことを議論します。

まず、McFadden (1978, 1981) による集計定理から見ていきましょう。彼は、離散的な選択肢に対して個人がランダムな確率変数を伴う効用関数をもつ場合、こうした消費者の決定を集計して、代表的消費者として分析することができることを示しました。McFadden は、所得と効用が線形関係にある効用関数を想定し、財の購入数量が 0 か 1 という離散的な選択肢の場合に焦点を絞りました。このとき、ある一定の条件をおくと、効用が所得に対して非線形で、離散的な財の購入数量が連続的な場合として一般化できることを示しました。これは、あとで議論しますが、例えば代表的な消費者が CES 型効用関数もちうる場合について示した Anderson, de Palma, and Thisse (1992) の第 2～5 章の最も重要な結論です。

こうした集計結果について述べると同時に、Berry (1994) による離散選択モデルを推定するための実証的な方法についても議論します。この手法は、消費者が何を選択したかという個人レベルのデータは入手できず、それぞれの製品に対して、それらの価格や特性とともに、購入された数量についての市場レベルのデータだけが観察できると想定しています。ここでの目標は、購入数量や価格といった市場レベルのデータから、個人の好みのパラメータだけでなく、限界費用のパラメータについても推計し、そこから価格と費用の差であるマージンを推計することです。

離散選択モデル

ここで、消費者 h の母集団を想定し、その規模を 1 と標準化します。各消費者

は、離散的な選択肢の数 $j = 1, \dots, N$ のなかからの購入を決定し、1単位の製品 j の消費によって、次の効用水準が得られるとします。

$$V_j^h = u_j + \varepsilon_j^h \quad (\text{B.1})$$

ここで、 u_j はどの消費者についても共通する製品 j から得られる効用の水準であり、 ε_j^h は消費者 h が得る追加的な効用の水準です。ただし、 ε_j^h は累積分布関数 $F(\varepsilon)$ にしたがうランダムな確率変数とし、追加的な効用水準の大きさである $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)$ は、各消費者によって異なるとします。このとき、消費者が製品 j を選択する確率は、

$$\begin{aligned} P_j &= \text{すべての } k = 1, \dots, N \text{ について、 } V_j \geq V_k \text{ の確率} \\ &= \text{すべての } k = 1, \dots, N \text{ について、 } u_j + \varepsilon_j \geq u_k + \varepsilon_k \text{ の確率} \\ &= \text{すべての } k = 1, \dots, N \text{ について、 } \varepsilon_j - \varepsilon_k \geq u_k - u_j \text{ の確率} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

になります。このとき、(B.2) 式は、消費者が選択肢 j を選ぶ確率、あるいは同じことですが、その選択肢を選ぶと期待された人口割合を表わしたものであると考えることができます。こうした選択確率の解は、分布関数 $F(\varepsilon)$ だけでなく、効用水準 u_j の形にも依存します。Berry (1994) が用いた簡略化した効用水準は以下のようものでした。

$$u_j = y + \beta z_j - \alpha p_j + \xi_j, \quad (\alpha > 0) \quad (\text{B.3})$$

この式を見るとわかりますが、効用水準は所得 y については線形で、価格 p_j については減少関数で、製品の特性 z_j にも依存した形になっています¹。また ξ_j の項は、効用水準においても一つのランダム要素になりますが、 ε_j^h とは違い、消費者によって異なるものではありません。この ξ_j の項は、製品 j の計測できない特性を表わしていて、製品によってランダムであっても、消費者によってランダムということではありません。

一般的に、(B.2) 式の選択確率を計算するにあたっては、 $F(\varepsilon)$ の領域のさまざまな部分を積分しなくてはならないため、多大な計算を必要とします。しかし、McFadden は、一般化極値分布[†]として知られている分布関数 $F(\varepsilon)$ であれば、単純な微分によって、期待需要量を同じように求めることができることを示しました。

1 この効用関数は、所得 y と価格 p_j についてゼロ次同次ではありません。ゼロ次同次の特性を得るには、ニュメレール価格 p_0 で相対化して、所得 y と価格 p_j を計測しなければなりません。つまり、その場合、効用水準は $u_j = y/p_0 - \alpha p_j/p_0 + \beta z_j + \xi_j$ になる。こうすれば、 (y, p_j, p_0) についてゼロ次同次となる。

†一般化極値分布とは、極値分布を一般化したものである。極値分布は、ある分布関数にしたがって得られたデータのうち、ある一定の数値以上（あるいは以下）となったデータの数がどのように分布するかを表わした連続型の確率分布になる。一般化極値分布では、平均を表わす位置パラメータ、分散を表わすスケール・パラメータ、歪度を表す形状パラメータの3つの変数で表わされる連続型の分布で、最大値や最小値がどのような分布にしたがうかを推計するために適用される分布である。

【定理1】 McFadden (1978, 1981)

関数 H が R^N_+ で定義される非負関数で、以下の特性を満たしているとする[†]。

† R^N_+ は、 N 次元の正の実数空間を表わし、任意の自然数 N に対して、正の実数の N 組全体からなる集合になる。

- (a) H は1次同次である。
- (b) どんな変数でもそれが無限大に近づけば、 $H \rightarrow \infty$ となる。
- (c) k に関して H の混合偏微分係数が連続的に存在し、 k が奇数の場合は非負で、 k が偶数の場合は非正になる ($k = 1, \dots, N$)。

一般化極値分布を次のように定義する。

$$F(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N) \equiv \exp[-H(e^{-\varepsilon_1}, e^{-\varepsilon_2}, \dots, e^{-\varepsilon_N})] \quad (\text{B.4})$$

このとき、消費者の期待効用の大きさ（定数項を含めて）は、次のような集計された効用関数として与えられる。

$$G(u_1, \dots, u_N) \equiv \ln H(e^{u_1}, e^{u_2}, \dots, e^{u_N}) \quad (\text{B.5})$$

また、(B.2) 式の選択確率 P_j は、次のように得られる。

$$P_j = \partial G / \partial u_j \quad (\text{B.6})$$

この定理を解釈するにあたって、(B.3) 式の線形の効用関数を考えます。この式を (B.5) 式に代入して、 H が線形同次であることを用いると、集計された効用関数は、

$$\tilde{G}(p_1, z_1, \dots, p_N, z_N, y) = y + \ln H(e^{\beta z_1 - \alpha p_1 + \varepsilon_1}, \dots, e^{\beta z_N - \alpha p_N + \varepsilon_N}) \quad (\text{B.5}')$$

となることがわかります。このとき、 $\partial \tilde{G} / \partial y = 1$ となります。また、 $\alpha = 1$ のケースを考えます。すると、価格が効用水準と逆相関になる ($du_j = -dp_j$) ので、(B.6) 式の選択確率は、 $P_j = \partial G / \partial u_j = -(\partial G / \partial p_j) / (\partial \tilde{G} / \partial y)$ と表わすことができます。したがって、この選択確率はロワの恒等式と同じ形になり、この定理の (B.6) 式の $P_j = \partial G / \partial u_j$ の結果は、集計されたレベルでロワの恒等式を満たすものであると解釈できます。

また、定理(a)～(c)の関数 H の条件は技術的な特性で、(B.4) 式の $F(\varepsilon)$ が実際に累積分布関数であることを保証するために必要です。こうした条件を満たす H は、ほかにもさまざま存在し、それぞれの H について、(B.5) 式のような集計された効用関数を得ることができます。また、こうした効用関数から得られる需要量は、(B.1)、(B.2) 式の個人の選択の問題によって得られたものを集計した需要量と同じ大きさになります。さらに、こうして集計された効用関数は、個人の期待効用水準を反映しているので、個々の消費者の厚生水準について述べることもできます。

この結論の有益性を確認するために、よく知られた例を紹介します。まず、各製品を消費するにあたって、(B.1) 式のランダムな効用水準を表わす ε_j が極値分布にしたがっており、さまざまな製品が独立に分布している状況を考えます。

●例1：ロジット需要システム

関数 H の変数が線形であるとしましょう。すなわち、

$$H(e^{-\varepsilon_1}, e^{-\varepsilon_2}, \dots, e^{-\varepsilon_N}) = \sum_{j=1}^N e^{-\varepsilon_j} \quad (\text{B.7})$$

とします。このとき、(B.7) 式を (B.4) 式に代入すると、分布関数は、

$$F(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N) = \prod_{j=1}^N \exp(-e^{-\varepsilon_j}) \quad (\text{B.8})$$

となります。したがって、この累積分布関数は、互いに独立で同一の分布にしたがう (iid; independent and identically distributed) 「二重指数関数[†]」, あるいは極値分布の積の形になっています。そして、(B.1) 式の効用水準の確率変数の項に適用されています。その結果、効用関数のランダムな確率変数の項は、iid 極値分布にしたがうこととなります²。

|| †この「二重指数 (double-exponential) 関数」の分布は、ガンベル分布とも呼ばれる。 ||

このとき、(B.7) 式と (B.3) 式を使って、(B.6) 式の選択確率を計算すると、次式が得られます。

$$P_j = \frac{e^{u_j}}{\left[\sum_{k=1}^N e^{u_k} \right]} = \frac{e^{\beta z_j - \alpha p_j + \varepsilon_j}}{\left[\sum_{k=1}^N e^{\beta z_k - \alpha p_k + \varepsilon_k} \right]} \quad (\text{B.9})$$

2 二重指数あるいは極値分布の議論は、Anderson, de Palma, and Thisse (1992, 58-62) を参照のこと。

これは、ロジット・システムにおける選択確率になります。

Berry (1994) は、たとえ各個人の購入に関するデータがなくても、需要された各製品の数量割合 s_j とともにそれらの価格や特性だけが観察される場合、いかに α と β を推計するかを議論しています。この場合、(B.9) 式の確率は、こうした数量割合 s_j から計測することができます。ただ、ここで集合外の選択肢として $j = 0$ を想定し、この選択肢を選んだときの効用水準をゼロ、すなわち $u_0 = 0$ と標準化します。その結果、 $s_j = P_j$ とみなすことができ、(B.9) 式を使って s_0 との比率に対数をとると、次式が得られます。

$$\ln s_j - \ln s_0 = \beta z_j - \alpha p_j + \xi_j \quad (\text{B.10})$$

さらに、Berry の議論にしたがって、企業の最適価格を求めるにあたり、単純化のために各企業は製品を1つだけ作ると仮定します。このとき、製品 j の限界費用の大きさを $g_j(z_j)$ とし、固定費用を無視した場合、製品 j のモデルを生産したときの利潤は、

$$\pi_j = [p_j - g_j(z_j)]s_j \quad (\text{B.11})$$

となります。ここで、他の製品の価格を一定として、(B.11) 式を最大化するように p_j を選んだ場合、次式が得られます。

$$p_j = g_j(z_j) - s_j / (\partial s_j / \partial p_j) = g_j(z_j) - (\partial \ln s_j / \partial p_j)^{-1} \quad (\text{B.12})$$

ロジット体系における (B.9) 式の特別なケースとして、数量割合を使って $s_j = P_j$ とした場合、 $\partial \ln s_j / \partial p_j = -\alpha(1 - s_j)$ と計算することができます。また、 ω_j を確率的誤差として、限界費用を $g_j(z_j) = \gamma z_j + \omega_j$ と定式化した場合、(B.12) 式より、最適価格は、

$$p_j = \gamma z_j + \frac{1}{\alpha(1 - s_j)} + \omega_j \quad (\text{B.13})$$

となり、(B.10) 式と同時に推定することで、パラメータを推計することができます。ただ、明らかに、(B.10) 式の確率的誤差 ξ_j は効用水準に影響するので、市場割合にも影響すると考えられるため、(B.13) 式より市場割合と価格 p_j が相関関係になることがわかります。その結果、(B.10) 式の右辺では、 p_j と ξ_j が相関するため、(B.10) 式と (B.13) 式の同時推計は、操作変数を用いて推計しなければなりません³。

3 Berry (1994, 249) は、(B.10) 式の価格に対する適切な操作変数として、他の製品モデルにおける z_k の特性だけでなく、製品 j を生産するときの費用に影響する変数を提案している。

ところで、この単純化されたロジット・モデルの例による問題点は、計算して得られた需要の弾力性の数値がもっともらしくないことです。(B.9) 式の市場割合 $s_j = P_j$ を見るとわかりますが、 s_j/s_k がいかなる第3製品 i の価格や特性からも独立していることが容易にわかります。この特徴は、離散選択モデルの文献では、「無関係な選択肢からの選択確率の独立性 (independence of irrelevant alternatives)」として知られています。これは、製品 j と k と第3製品 i の間の需要の交差弾力性が、いずれもかならず等しくなるというものですが、この問題を改善するために、次に入れ子型のロジット・システム (nested logit system) を考えます。

●例2:入れ子型のロジット・システム

今、消費者が、差別化された製品を2段階で選ぶ状況を考えます。具体的にいうと、最初に、個人が $g = 1, \dots, G$ のグループ (例えば、小さい車と大きい車など) のそれぞれのなかから、どれか1つの製品を購入することを決定し、次の個人が、グループ内のどれかの製品を購入することを決定するというものです。また、それぞれのグループ g のうち、購入することができる製品の集合を、 $J_g \subset \{1, \dots, N\}$ で表わすとします。ただし、 J_0 は、集合外の選択肢とします。このとき、消費者 h の効用水準は先ほどと同様に (B.1) 式で与えられ、誤差項 ε_j は、極値分布にしたがうものの、独立ではないとします。具体的には、消費者 h が $j \in J_g$ におけるいくつかの製品に対して、効用水準 ε_j^h が高い数値である場合、その個人の、そのグループ g 内の他の製品 k ($k \in J_g$) に対する ε_k^h も高くなるとします。つまり、 ε_j がそれぞれのグループ内の製品どうしで、正の相関があるとするのです。例えば、ある個人が小さな車を好むのであれば、その人は別の小さな車も好む傾向があるということです。これは、先の「無関係な選択肢からの選択確率の独立性」との関係でいうと、第1段階ではこの「独立性」が満たされるものの、第2段階ではこの仮定が緩められることになります。

(B.1) 式の確率的誤差項どうしで生じるこの相関の問題を組み込むために、McFadden (1981, 228) は、関数 H を次のように表わしました。

$$H(e^{-\varepsilon_1}, \dots, e^{-\varepsilon_N}) = \sum_{g=0}^G \left[\sum_{j \in J_g} e^{-\varepsilon_j/(1-\rho_g)} \right]^{(1-\rho_g)} \quad (\text{B.14})$$

また、定理1の(c)の性質を満たすために、 $0 < \rho_g < 1$ と特定化する必要があります。このように H を選ぶと、(B.4) 式の分布関数 $F(\varepsilon)$ は次のようになります。

$$F(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N) = \exp \left(\sum_{g=0}^G \left[\sum_{j \in J_g} -e^{-\varepsilon_j/(1-\rho_g)} \right]^{(1-\rho_g)} \right) \quad (\text{B.15})$$

ここで、 ρ_g は、グループ内の確率的誤差項 ε_j 間の相関をおおまかに測定したものです⁴。(B.14) 式を使って、(B.6) 式にある選択確率を計算すると、次式が得られます。

$$P_j = \frac{e^{u_j/(1-\rho_g)} D_g^{(1-\rho_g)}}{D_g \left[\sum_{g=0}^G D_g^{(1-\rho_g)} \right]} \quad (j \in J_g \text{ について}) \quad (\text{B.16})$$

ここで、(B.16) 式にある $D_g \equiv \sum_{k \in J_g} e^{u_k/(1-\rho_g)}$ の項は、グループ g 内のすべての製品から得られる効用水準を足し合わせたもので、包括値 (inclusive value) と呼ばれます。

Berry (1994, 252) は、この入れ子型のロジットのケースについて、少し違う見方をしました。彼は、追加的な効用水準を表わす確率的誤差 ε_j^h を次のように書き換えました。

$$\varepsilon_j^h = \zeta_g^h + (1-\rho_g)e_j^h \quad (j \in J_g \text{ について}) \quad (\text{B.17})$$

ただし、誤差項 e_j^h は iid 極値分布にしたがうとします。また、(B.17) 式の確率変数 ζ_g^h は、グループ g 内のすべての製品で共通であるとします。したがって、グループ内のそうした製品のランダムな効用水準を表わす ε_j^h というのは、相関関係を引き起こすこととなります。Cardell (1977) は、(ρ_g に依存する) ζ_g^h の分布が存在し、 e_j^h が iid 極値分布にしたがう場合は、 ε_j^h も極値分布になるものの、相互に独立にはならないことを示しています。この ε_j^h については、 ρ_g が 1 に近づくと、 ε_j^h はグループ g 内で完全に相関します (ε_j^h が ζ_g^h に等しくなる)。その一方で、 ρ_g が 0 に近づくと (この場合は、 ζ_g^h もまたゼロに近づくと)、 ε_j^h は独立した分布になります。また、(B.17) 式の誤差項を使うと、(B.16) 式で示される選択確率と同じものになるとしています。

Berry (1994, 252-253) でも同じことをしていますが⁵、(B.16) 式の入れ子型のロジットの選択確率を用いると、市場割合と最適価格についての推計式をふたたび導くことができます。(B.16) 式の右辺前方の分数の項は、グループ g をすでに選んだという条件下で、個人が製品 j ($j \in J_g$) を選ぶ確率になっています。この条件付き確率を $s_{j|g}$ とおきます。また、(B.16) 式の右辺後方の分数の項は、グループ g から製品を選ぶ確率で、ここでは \bar{s}_g とおきます。すると、(B.16) 式の P_j を市場割合 s_j で置き換えると、(B.16) 式の選択確率は、 $s_j = s_{j|g}\bar{s}_g$ と書くことができ

4 Johnson and Kotz (1972, 256) では、パラメータ $(1-\rho_g)$ は $j, k \in J_g$ で、かつ $j \neq k$ において $\sqrt{1-\text{corr}(\varepsilon_j, \varepsilon_k)}$ と等しくなり、その結果、 $\rho_g > 0$ であれば、 $\text{corr}(\varepsilon_j, \varepsilon_k) > 0$ になるとしている。

ます。さらに、集合外の選択肢については $u_0 = 0$ とし、その包括値を $D_0 = 1$ と仮定すると、(B.16) 式より、 $s_0 = P_0 = [\sum_{g=0}^G D_g^{(1-\rho_g)}]^{-1}$ となります。また、 $s_j/s_0 = s_{j|g} \bar{s}_g/s_0$ の比率に対数をとって、(B.3) 式の線形効用関数 u_j を用いると、次式が得られます。

$$\ln s_j - \ln s_0 = \frac{(\beta'z_j - \alpha p_j + \xi_j)}{(1-\rho_g)} - \rho_g \ln D_g \quad (\text{B.18})$$

このとき、包括値 D_g を求めるにあたって、(B.16) 式の右辺後方の分数の項が \bar{s}_g に等しいことを利用すると、 $\bar{s}_g/s_0 = D_g^{(1-\rho_g)}$ となり、その結果、 $\ln \bar{s}_g - \ln s_0 = (1-\rho_g) \ln D_g$ となります。これを (B.18) 式に代入して、 $s_j = s_{j|g} \bar{s}_g$ を使って単純化すると、次式が得られます。

$$\ln s_j - \ln s_0 = \beta'z_j - \alpha p_j + \rho_g \ln s_{j|g} + \xi_j \quad (j \in J_g \text{ について}) \quad (\text{B.19})$$

これは、パラメータ (α, β) を推計する回帰式になります。また、最後の $\ln s_{j|g}$ の項は、グループ g 内における製品 j の市場割合を測定したもので、内生変数になります。したがって、ここでも、(B.19) 式を推計するにあたっては、操作変数を用います⁵。

さらに、ここでは Berry (1994, 255) にしたがって、単純化して企業が製品 j を 1 つだけ作ると仮定して、企業の最適価格を求めてみましょう。まず、利潤の大きさは先ほどと同様に (B.11) 式になり、1 階の条件式は (B.12) 式になります。(B.16) 式で $s_j = P_j$ としたときの入れ子型のロジット体系では、対数をとった市場割合を微分すると、

$$\partial \ln s_j / \partial p_j = -\frac{\alpha}{(1-\rho_g)} [1 - \rho_g s_{j|g} - (1-\rho_g) s_j]$$

になります。また、限界費用を $g_j(z_j) = \gamma'z_j + \omega_j$ (ただし、 ω_j は確率的誤差) としたとき、(B.11) 式より、最適価格は、

$$p_j = \gamma'z_j + \frac{(1-\rho_g)}{\alpha[1-\rho_g s_{j|g} - (1-\rho_g) s_j]} + \omega_j \quad (\text{B.20})$$

になります。そして、この式は操作変数を用いて、(B.19) 式と同時推計することができます。この価格方程式は、多品種製品を作る企業について議論した第 8 章において一般化したものと同じもので、Irwin and Pavcnik (2004) は、民間航空機への輸出補助金について研究した際に用いています。

5 Berry (1994, 254) では、適切な操作変数として、グループ g 内の他の製品や企業の特性を含めたものを提案している。

単純なロジット・モデルと比べると、入れ子型のロジット・システムでは、製品間により一般的な代替を認めています（また、「無関係な選択肢からの選択確率の独立性」の制約に悩まされることもない）。例えば、Goldberg（1995）は、入れ子型のロジット・システムを用いて、米国の自動車の需要や日本の輸出自主規制（VER）の影響を分析しています。より広く不均一な消費者を対象にすることによって、より柔軟な自動車の需要パターンの分析を可能にしています。こうした研究の一つである Berry, Levinsohn, and Pakes（1995, 1999）は、日本の自動車輸出や VER を分析しています。彼らの研究は、(B.3) 式の効用関数を

$$u_j^h = \beta^h z_j - \alpha p_j + \xi_j \quad (\alpha > 0) \quad (\text{B.3'})$$

に変えて、パラメータ β^h が個人 h に依存する形とし、人口的特性と所得の双方を反映させています。 β^h には個人の所得の要素が含まれているため、(B.3) 式の所得パラメータは (B.3') 式では明示的に除外されていますが、一般性は失われません。

もし個人的特性とそれに伴う離散的な選択の双方を観察することができたら、標準的な計量経済学の離散選択に関する演算で (B.3') 式の他のパラメータも推計することができるでしょう。しかし、市場レベルの需要と一般的な個人的特性の分布しか観察できない場合、(B.3') 式のパラメータを推計することはより困難になります。このことを確認するために、個人的特性 β^h の分布を $\bar{\beta} + \eta^h$ と仮定しましょう。ここで、 $\bar{\beta}$ は母集団の平均値で、 η^h は特性に対して個人の好みをとらえた確率変数とします。これを (B.3') 式に代入したあと、さらに (B.1) 式に代入することで、効用の大きさは次のように得られます。

$$V_j^h = \bar{\beta} z_j - \alpha p_j + \xi_j + (\eta^h z_j + \varepsilon_j^h) \quad (\text{B.1}')$$

この式では、個人の好みに関する η^h と製品の特性 z_j との間の相互作用項である $\eta^h z_j$ が、確率的誤差に含まれたものになっています。この相互作用項が入るため、定理 1 を用いることはできません。つまり、総合誤差としての $(\eta^h z_j + \varepsilon_j^h)$ の累積分布が、定理 1 の想定よりもいっそう一般的なものになってしまっているのです。したがって、選択確率についての (B.6) 式のように閉形式解を求めることができないことになります。

こうした理由から、定理 1 から選択確率を求めることはできず、それを求めるためには、(B.2) 式の数値計算をしなくてはなりません。すなわち、さまざまな製品の (p_j, z_j) のデータを得ることで、 $(\eta^h z_j + \varepsilon_j^h)$ の分布をシミュレーションするのです。そして、この分布にしたがうとし、 $(\alpha, \bar{\beta}, \xi_j)$ のパラメータを推計することで、各製品の効用の大きさである V_j^h を計算します。ところで、(B.2) 式を選択確率 P_j

は、製品 j が最も高い効用を与える割合を計算したものです。そのため、 $(\alpha, \bar{\beta}, \xi_j)$ のパラメータは、観察された市場割合 s_j と選択確率ができるだけ一致するように求められたものだといえます。同様に考えると、価格による市場割合の期待の変化、つまり (B.12) 式の $(\partial s_j / \partial p_j)$ は、選択確率 P_j が価格 p_j とともにどう変化するかを数値計算したのですが、この変化もまた、 $(\alpha, \bar{\beta}, \xi_j)$ のパラメータに依存し、価格方程式とできるだけ適合したものになっています。したがって、効用の確率的誤差項をシミュレーションした分布を使って、市場割合と価格方程式を同時に用いることで、潜在的な好みや費用のパラメータを推計しようとしているのです。こうした考えが、Berry, Levinsohn, and Pakes (1995, 1999) の研究結果の背後にある考え方ですが、より詳しいことを知りたい読者は、参考文献として彼らの研究を読むとよいでしょう⁶。

また、上記の手法に関しては、離散選択モデルの第3の手法と見ることができるところで有益です。つまり、代表的消費者を使う手法や確率変数を伴った効用水準をもつ個人についての分析手法ではなく、選好の特性の観点が個人によって異なることに着目した手法で、「理想的多様性 (ideal variety)」アプローチと呼ばれるものになります。Anderson, de Palma, and Thisse (1992) は、これら3つすべての手法が同等であることを導きました。また、Bresnahan (1981) は、離散選択モデルとして、この「理想的多様性」アプローチを用いて実証分析をした最初の研究になります。Bresnahan は、理想と思う自動車の車種が消費者によって異なるとして、価格が高い自動車モデルは、マークアップの割合も高くなる傾向があることを示しました。また、Feenstra and Levinsohn (1995) は、Bresnahan の主張をさらに展開して、特性が多次元で異なるという形で緩めて、Bresnahan のモデルを一般化し、企業の最適価格が隣接する企業との距離によって変化することを示しました。

連続的な数量の場合の離散選択

消費者の不均一性の問題はいったん脇において、定理1を一般化する試みとして

6 離散選択モデルを個人の好みのパラメータでシミュレーションして推計する場合、「混合ロジット」モデルと呼ばれる。これに関しては、例えば McFadden and Train (1997) や Revelt and Train (1999) を参照せよ。Kenneth Train の研究によるソフトウェアを含めた通信教育講座の離散選択の手法で混合ロジットモデルを推計した研究結果は、<http://elsa.berkeley.edu/~train/distant.html> を参照のこと。

他の方法を考えてみましょう。それは、集計された効用関数をそのまま利用するもので、ロワの恒等式を使って需要量を計算することができます。ここでも消費者が製品 $j = 1, \dots, N$ を選ぶとして、効用関数が次の形をしているとします。

$$V_j^h = \ln y - \ln \varphi(p_j, z_j) + \varepsilon_j^h \quad (j = 1, \dots, N) \quad (\text{B.21})$$

ここで、 p_j は製品 j の価格、 z_j は特性のベクトル、 y は消費者の所得、 ε_j^h は製品 j から消費者 h が得る追加的な効用水準を反映する確率変数の項を表わしています。したがって、所得はもはや線形の形で効用の大きさに入っておらず、さらに、個人が連続的な数量（0 か 1 という形で制限されることなく）で好みの製品 j を消費できるものになっています。

また、各消費者が、彼または彼女の好みの製品 j を選択する確率 (Prob) は、

$$\text{すべての } k = 1, \dots, N \text{ について, } P_j = \text{Prob}[V_j \geq V_k] \quad (\text{B.22})$$

となります。もし、製品 j が選ばれたとき、ロワの恒等式を使って、(B.21) 式の間接効用関数から消費数量を求めることができます。すなわち、

$$c_j = -\frac{\partial V_j^h / \partial p_j}{\partial V_j^h / \partial y} = y (\partial \ln \varphi / \partial p_j) \quad (\text{B.23})$$

になります。その結果、各製品の期待された需要量は、

$$X_j = c_j P_j \quad (\text{B.24})$$

になります。消費者に対する問題のこの定式化は、これまで考えてきたことと比べるといくぶんより一般的になっていますが、それは、ここでは消費者が購入する数量が連続的な選択であることを認めているからです。これは、いわゆる連続的／離散のモデルの分野になります (Train 1986, 第 5 章を参照のこと)。ただし、この問題の定式化については、(B.23) 式の購入数量に不確実性がないため、単純なものになっています。つまり、効用関数の確率変数の項が影響するのは、(B.22) 式の製品の選択だけになります⁷。こうしたモデル設定によって、McFadden (1978, 1981) の集約された結論が同じようにうまくあてはまり、定理 1 を定理 2 に拡張することができます⁸。

7 それとは対照的に、Dubin and McFadden (1984) は、応用として、製品の離散選択と連続的な消費量の両方に不確実性がある場合を分析している。

8 定理 2 の証明は、McFadden の結論に基づいたもので、Feenstra (1995) の命題 1 で与えられている。

【定理 2】

H を、 R^N で定義される非負関数で、定理 1 の (a)~(c) の条件が満たされているとします。また、累積分布関数 F を (B.4) 式のように定義し、集計された間接効用関数を次のように定義する。

$$G(p_1, z_1, \dots, p_N, z_N, y) = \ln y + \ln H[\varphi(p_1, z_1)^{-1}, \dots, \varphi(p_N, z_N)^{-1}] \quad (\text{B.25})$$

その結果、

(a) (B.24) 式から計算できる期待需要量は、 $-(\partial G/\partial p_j)/(\partial G/\partial y)$ に等しくなる。

(b) G は、(B.21) 式の個人の期待効用水準に等しくなる (定数項を含めて)。

定理 (a) のように、ロワの恒等式を使って需要量を計算することができ、定理 (b) のように、集計された効用関数を使って、厚生水準の大きさを推測することができます。ここで、期待効用は、単調な変化 $\tilde{G} = \exp(G)$ によって、よりなじみのある数式に書き換えることができます。したがって、

$$\tilde{G}(p_1, z_1, \dots, p_N, z_N, y) = yH[\varphi(p_1, z_1)^{-1}, \dots, \varphi(p_N, z_N)^{-1}] \quad (\text{B.25}')$$

になります。この式は、代表的消費者の間接効用関数と解釈することができます。

この結論の有益性を確認するために、ここでふたたび、(B.21) 式でランダムな効用をもたらす ε_j^h を使って、集計された CES 型効用関数を導出します。 ε_j^h は極値分布し、さまざまな製品に独立に分布する確率変数です。

●例 3 : CES 型需要システム

個人の効用関数を次のように定式化します⁹。

$$V_j^h = \ln y - \alpha \ln [p_j/f(z_j)] + \varepsilon_j^h \quad (\alpha > 0) \quad (\text{B.26})$$

この式では、価格がそのまま用いられているのではなく、消費者が認識した製品の「品質」である $f(z_j)$ で相対化した価格として測定されています。

ここでも (B.7) 式と同様に、関数 H が線形関係で表わされるとします。したがって、(B.8) 式の累積分布関数は、iid 極値分布を N の数掛け合わせたものになり、(B.26) 式の誤差項は、iid 極値分布にしたがいます。

⁹ この効用関数は、所得 y と価格 p_j についてゼロ次同次ではない。ゼロ次同次の特性にするためには、ニュメレール価格 p_0 で相対化して、所得 y と価格 p_j を計測しなければならない。つまり、その場合、効用水準は $\ln(y/p_0) - \alpha \ln [(p_j/p_0)/f(z_j)]$ になる。こうすれば、 (y, p_j, p_0) についてゼロ次同次となる。

また、(B.7)、(B.25)、(B.26)式を使うと、集計された効用関数を次のように求めることができます。

$$G(p_1, z_1, \dots, p_N, z_N, y) = y \sum_{j=1}^N [p_j / f(z_j)]^{-\alpha} \quad (\text{B.27})$$

したがって、集計された期待需要量は、

$$-\frac{\partial G / \partial p_j}{\partial G / \partial y} = y \left(\frac{\alpha p_j^{-\alpha-1} / f(z_j)^{-\alpha}}{\sum_{k=1}^N [p_k / f(z_k)]^{-\alpha}} \right) \quad (\text{B.28})$$

になります。よって、(B.27)式から、代替の弾力性 σ が $1+\alpha$ になる集計された消費者のCES型間接効用関数が得られ、さらに(B.28)式からはそれに関連してCES型需要量を求めることができます。Anderson, de Palma, and Thisse (1989; 1992, 85–90)の結論は、確率変数を伴う効用関数の誤差項がiid極値分布にしたがう場合、CES型効用関数が離散選択モデルから導かれるというものですが、ここでの議論は、彼らの結論を別の形で証明したものになっています。また、ここで注目してほしいのは、ここでのCES型需要体系の議論では、効用関数に確率変数の項が入るロジット・モデルの体系と同一の仮定を設けています(ともにiid極値分布を用いている)が、ロジット・モデルの体系と異なるのは、財が離散的であるものの、その需要については連続的な数量を認めているという点です。

●例4:入れ子型のCES型需要システム

例2で取り上げた入れ子型のロジット体系の議論と同様に、消費者が差別化された製品を2段階で選ぶ状況を考えます。具体的にいうと、最初に、個人が $g = 1, \dots, G$ のグループのそれぞれのなかから、どれか1つの製品を購入することを決定し、次の個人が、そのグループ内のどれかの製品を購入することを決定するというものです。また、それぞれのグループ g のうち、購入することができる製品の集合は、 $J_g \subset \{1, \dots, N\}$ で表わすとします。ただし、 J_0 は、集合外の選択肢であるとします。このとき、消費者 h の効用水準は先ほどと同様に(B.26)式で与えられ、誤差項 ε_j^h は、極値分布にしたがうものの、独立ではないとします。また、関数 H を(B.14)式のように定式化し、(B.15)式のような累積分布関数 F にしたがうものとします。

その結果、(B.14)、(B.25)、(B.26)式を使うことで、集計された効用関数を次のように求めることができます。

$$G(p_1, z_1, \dots, p_N, z_N, y) = y \sum_{g=0}^G \left(\sum_{j \in J_g} [p_j / f(z_j)]^{-\alpha/(1-\rho_g)} \right)^{(1-\rho_g)} \quad (\text{B.29})$$

ここで、ロワの恒等式を適用することで、容易に製品 j に対する期待需要量を求めることができます。すなわち、

$$X_j = -\frac{\partial G/\partial p_j}{\partial G/\partial y} = \left(\frac{\alpha y}{p_j}\right) \frac{[p_j/f(z_j)]^{-\alpha/(1-\rho_g)} D_g^{(1-\rho_g)}}{\left[\sum_{g=1}^G D_g^{(1-\rho_g)}\right]} \quad (j \in J_g) \quad (\text{B.30})$$

になります。ここでも、(B.30) 式の $D_g \equiv \sum_{j \in J_g} [p_j/f(z_j)]^{-\alpha/(1-\rho_g)}$ の項は、(B.16) 式と類似した「包括値」になります。ここで、(B.30) 式の右辺の期待需要量は、3つの項の積で構成されていることがわかります。すなわち、第1項 $(\alpha y/p_j)$ は、標準的なコブ=ダグラス型需要関数で、(B.26) 式の効用関数が与えられたときの財の連続的な需要量を表わしています。また、第2項 $[p_j/f(z_j)]^{-\alpha/(1-\rho_g)}/D_g$ は、グループ g における製品 j の需要割合を表わしています。さらに、第3項 $D_g^{(1-\rho_g)}/[\sum_{g=1}^G D_g^{(1-\rho_g)}]$ は、製品全体の需要量に対するグループ g の割合を示しています。この第2、3項は、両方とも (B.16) 式の入れ子型のロジット・システムにも出てきましたので、(B.30) 式の新しい項は、連続的な需要量である $(\alpha y/p_j)$ になります。

ところで、パラメータ α と ρ_g は、容易に製品間の代替の弾力性と関連づけることができます。2つの製品 i と j ($i, j \in J_g$) に関して、(B.30) 式から相対需要量を求めると、

$$\frac{X_i}{X_j} = \left(\frac{f(z_i)}{f(z_j)}\right)^{\alpha/(1-\rho_g)} \left(\frac{p_i}{p_j}\right)^{-\alpha/(1-\rho_g)-1} \quad (i, j \in J_g) \quad (\text{B.31})$$

になることがわかります。したがって、同一グループ g 内の2つの製品の代替の弾力性は $1 + [\alpha/(1-\rho_g)] > 1$ となり、1より大きいことがわかります。

さらに、(B.29) 式から、2つの異なるグループ g と h の製品の支出比率は、

$$\frac{\sum_{i \in J_g} p_i X_i}{\sum_{j \in J_h} p_j X_j} = \frac{D_g^{(1-\rho_g)}}{D_h^{(1-\rho_h)}} \quad (i \in J_g, j \in J_h) \quad (\text{B.32})$$

になります。グループ g の製品の価格指数を、

$$P_g \equiv \left[\sum_{j \in J_g} [p_j/f(z_j)]^{-\alpha/(1-\rho_g)} \right]^{-(1-\rho_g)/\alpha} = D_g^{-(1-\rho_g)/\alpha}$$

と定義すると、(B.32) 式の支出比率は次のように書き換えることができます。

$$\frac{(\sum_{i \in J_g} p_i X_i)/P_g}{(\sum_{j \in J_h} p_j X_j)/P_h} = \left(\frac{P_g}{P_h}\right)^{-\alpha-1} \quad (i \in J_g, j \in J_h) \quad (\text{B.33})$$

このとき、(B.33) 式の左辺は、グループ g とグループ h の支出割合をそれぞれの価格指数で割り引いたものとなり、実質支出比率と解釈できます。このことから、

この比率が、2つのグループの価格指数の比率に依存し、その弾力性が1よりも大きくなる ($1+\alpha > 1$) ことがわかります。Feenstra, Hanson, and Lin (2004) は、この入れ子型の CES 構造をより一般化して、中国に外部委託している企業を仲介している香港の貿易業者の利益を推計しています。