

練習問題の解答

練習問題 1

- 1 $(x, y) = (0, 0)$ が解になる.
- 2 $(x, y) = (0, 0)$ の他に $(t, -t)$ (t は任意の数) が解になる.
- 3 $(x, y) = (0, 0)$ が必ず解になることが分かるので、解なしのケースは存在しない.
- 4 (23) の右辺に $x = x_1$ を代入すると

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_1 - x_1) + y_1 = 0 + y_1 = y_1$$

となる. (23) の右辺に $x = x_2$ を代入すると

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_2 - x_1) + y_1 = y_2 - y_1 + y_1 = y_2$$

となる. よって、式 (23) は、 (x_1, y_1) と (x_2, y_2) を満たす.

- 5 与えられた (20) 式 $f(x) = 2x^2 - 2(x_1 + x_2)x + x_1^2 + x_2^2$ を微分すると下になる.

$$\frac{df}{dx}(x) = 4x - 2(x_1 + x_2)$$

この $\frac{df}{dx}(x) = 0$ を解くと、解が求まる.

$$\frac{df}{dx}(x) = 0 \iff x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

- 6 問い 2 の答えを練習問題 5 の解き方に基づいて確認します. データ x_1, x_2, x_3 に対する残差の 2 乗の和を f とします. それとその微分は、

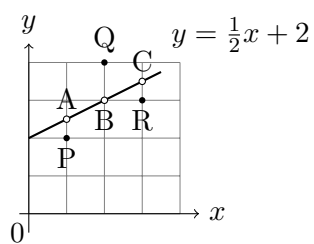
$$\begin{aligned} f(x) &= (x_1 - x)^2 + (x_2 - x)^2 + (x_3 - x)^2 \\ &= 3 \left(x - \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \right)^2 + \frac{2}{3}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_1) \\ \frac{df}{dx}(x) &= 6 \left(x - \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \right) \end{aligned}$$

となります. よって、 $x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$ が最適な推測になります.

- 7 例 3 で求めた直線 $y = 2x$ は点 P(1, 2), R(3, 6) を通るので、これらの残差はゼロである ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$). 点 Q(2, 7) との残差は、 $y = 2 \cdot 2 = 4$ なので、 $\varepsilon_3 = 7 - 4 = 3$ となる. よって、残差の 2 乗和は $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 = 0^2 + 0^2 + 3^2 = 9$ となる.

- 8 推定式 $y = \frac{1}{2}x + 2$ を $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ とします. 図にある各点の推定値 A, B, C を計算します.

$$y_A = f(1) = \frac{1}{2} \cdot 1 + 2 = \frac{5}{2}, \quad y_B = f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2 + 2 = 3, \quad y_C = f(3) = \frac{1}{2} \cdot 3 + 2 = \frac{7}{2}.$$



各点の残差 $\varepsilon_A, \varepsilon_B, \varepsilon_C$ を計算します.

$$\varepsilon_A = 2 - y_A = 2 - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}, \quad \varepsilon_B = 4 - y_B = 4 - 3 = 1, \quad \varepsilon_C = 3 - y_C = 3 - \frac{7}{2} = -\frac{1}{2}.$$

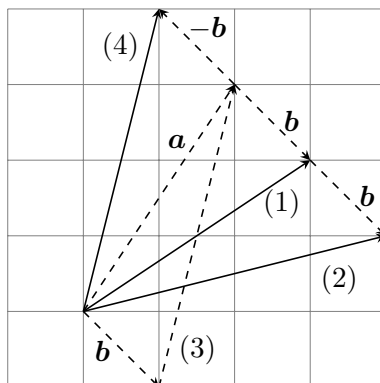
各点の残差の 2 乗和 $\varepsilon_A^2 + \varepsilon_B^2 + \varepsilon_C^2$ を計算します.

$$\varepsilon_A^2 + \varepsilon_B^2 + \varepsilon_C^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4} = \frac{3}{2}.$$

上図より直線 $y = \frac{1}{2}x + 2$ は各点 P, Q, R からの距離がとても小さいことが見て取れる.

練習問題 2

1 解答は下の図のようになる。ベクトルは平行移動して重ね合わせられれば等しいので他の表現もあり得ます。特に (3) と (4) は等しい。



2 3 個のベクトルを持つ集合 $\{b, c, d\}$ は下記が成り立つので 1 次従属である。

$$b + 3c + d = 0$$

3 ベクトル $0'$ がゼロベクトルの定義 $a + 0' = a$ を満たしているとします。この a を 0 とすると、

$$0 + 0' = 0$$

となります。もちろん、 0 はゼロベクトルの定義を満たしているので、その a を $0'$ とすると、

$$0' + 0 = 0'$$

となり、交換律を使うと下が成り立ちます。

$$0 + 0' = 0'$$

よって、最初の等式の左辺と等しいので下記が成り立ちます。

$$0 = 0'$$

4 ベクトル a の逆ベクトルは $-a$ と $-a'$ があるとします。結合律と逆ベクトルの定義を用いると以下が成り立ちます。

$$-a = -a + 0 = -a + (a + (-a')) = (-a + a) + (-a') = 0 + (-a') = -a'$$

よって、 $-a = -a'$ が成り立ちます。

5 ゼロベクトルの性質を用いると下記が成り立ちます。

$$k0 = k(0 + 0) = k0 + k0$$

よって、 $k0 = k0 + k0$ なので $k0 = 0$ が成り立ちます。

6 ベクトルの定義の 6 行目「スカラー乗はスカラーの和に関して分配法則を満たしている」ことから下記が成り立ちます。

$$0a = (0 + 0)a = 0a + 0a$$

よって, $0\mathbf{a} = \mathbf{0}$ が成り立ちます.

7 練習問題 6 を利用すると下記が成り立ちます.

$$\mathbf{a} + (-1)\mathbf{a} = 1\mathbf{a} + (-1)\mathbf{a} = (-1 + 1)\mathbf{a} = 0\mathbf{a} = \mathbf{0}$$

このように $(-1)\mathbf{a}$ は逆ベクトルの定義 $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ を満たしている. よって, $(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}$ が成り立ちます.

8 まず, $\mathbf{x}$ が $\mathbf{b} + \mathbf{x} = \mathbf{a}$ を満たしているとき下記が成り立ちます.

$$\mathbf{x} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{b} + (-\mathbf{b}) + \mathbf{x} = (-\mathbf{b}) + \mathbf{b} + \mathbf{x} = (-\mathbf{b}) + \mathbf{a} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$$

逆に $\mathbf{x} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$ ならば下記が成り立ちます.

$$\mathbf{b} + \mathbf{x} = \mathbf{b} + \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \mathbf{b} + (-\mathbf{b}) + \mathbf{a} = \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$$

練習問題 3

1 ゼロベクトルではない $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ に対して, $\mathbf{b} = k\mathbf{a}$ となる 0 ではないスカラー k が存在しているとき, つまり $\mathbf{b} = k\mathbf{a} = k \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ となる 0 ではない k が存在するときに下が成り立ちます.

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \quad |\mathbf{b}| = |k\mathbf{a}| = \left| k \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{k^2 a_1^2 + k^2 a_2^2} = |k| \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

よって, 下が成り立ちます.

$$|\mathbf{a}||\mathbf{b}| = |k|(a_1^2 + a_2^2) = |k||\mathbf{a}|^2$$

一方で, $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の内積に関して下が成り立ちます.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot k\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot ka_1 + a_2 \cdot ka_2 = ka_1^2 + ka_2^2 = k(a_1^2 + a_2^2) = k|\mathbf{a}|^2$$

この 2 式の右辺の違いは k に絶対値が付いているか否かです. よって, 下が成り立ちます.

$$\begin{cases} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| & \text{if } k > 0 \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -|\mathbf{a}||\mathbf{b}| & \text{if } k < 0 \end{cases}$$

2 三角形 ABC において $\angle A$ と $\angle B$ がともに鋭角である場合を考えます. 図 3 のように頂点 C から底辺 AB に垂線 CH を降ろします. ちなみに垂線とは英語で perpendicular といい, 直線に対して直角を成すように引かれる直線をいいます. ある点から直線へ垂直に交わる直線を引くことを「垂線を下ろす」と表現します.

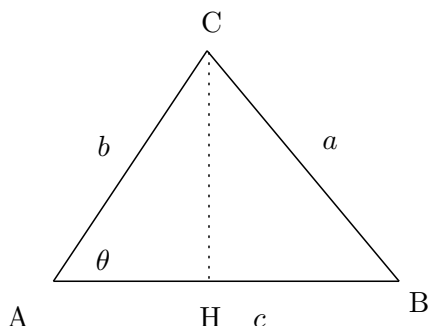


図 3: 余弦定理の証明

三角形 CBH において三平方の定理より

$$BC^2 = CH^2 + BH^2 \quad (28)$$

が成り立ちます. また $\sin \theta$ と $\cos \theta$ を用いると

$$CH = b \sin \theta, \quad AH = b \cos \theta$$

になります. よって,

$$BC = a, \quad CH = b \sin \theta, \quad BH = c - b \cos \theta$$

になります. これを (28) に代入すると, 途中で (9) 式をもちいて,

$$\begin{aligned} a^2 &= (b \sin \theta)^2 + (c - b \cos \theta)^2 \\ &= b^2 \sin^2 \theta + c^2 - 2bc \cos \theta + b^2 \cos^2 \theta \\ &= b^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + c^2 - 2bc \cos \theta \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \theta \end{aligned}$$

となり余弦定理 (30) の証明が完了しました.

角 A が直角の直角三角形の場合は, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ ですから, 余弦定理 (30) は $a^2 = b^2 + c^2$ すなわちピタゴラスの定理 (4) が成り立っています. つまり余弦定理はピタゴラスの定理の一般化とも言えます.

3 図 16 のベクトルの作る三角形に余弦定理 (30) を適用する 68 の式 (31) が成り立ちます. 内積と長さの関係より

$$|\mathbf{b} - \mathbf{a}|^2 = (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \quad (29)$$

$$|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \quad (30)$$

$$|\mathbf{b}|^2 = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \quad (31)$$

となります. 最初の (29) 式の右辺はつぎのように展開できます.

$$\begin{aligned} (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) &= (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} + (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot (-\mathbf{a}) \\ &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} + (-\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot (-\mathbf{a}) + (-\mathbf{a}) \cdot (-\mathbf{a}) \\ &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \end{aligned} \quad (32)$$

最初と 2 番目の等号は内積の性質の (3) を使っています. 3 番目の等号は内積の性質の (4) を使っています. 4 番目の等号は内積の性質の (5) を使っています.

よって, 与えられた式 (31) は, (30),(31),(32) を用いて, 次に変形できます.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} - 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$$

両辺を整理すると証明が完成します.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$$

4 まず内積の性質 6 を証明します. 性質 5, 3, 5 を用いています.

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$$

内積の性質 7 を証明します. 性質 5, 4, 5 を用いています.

$$\mathbf{a} \cdot (k\mathbf{b}) = (k\mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = k\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = k\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

5 ここであるベクトル $\mathbf{a}$ と基本ベクトルとの内積を計算してみます.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 = a_1$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 1 = a_2$$

内積を取ると成分 a_1, a_2 が出てきました. よって, (1) は以下のように書き換えられます.

$$\mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2$$

6 このとき直交ベクトルは $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ です. 直線上のベクトル $\mathbf{a}$ との内積を 0 と置くと直線の方程式が出てきます.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff -2x + y = 0 \iff y = 2x$$

7 定義 (4) (p.31) より, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ の 1 次独立は下を満たす c_1, c_2 が存在することです.

$$c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \implies c_1 = c_2 = 0 \quad (33)$$

この等式の左辺が成り立っているときにベクトル $\mathbf{v}_1$ との内積を取ります. 直交性 $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$ より

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 \cdot c_1 \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \cdot c_2 \mathbf{v}_2 &= \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{0} \iff c_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0 \iff c_1 |\mathbf{v}_1|^2 + 0 = 0 \\ &\iff c_1 = 0 \quad (\because \mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}) \end{aligned}$$

が成り立ちます. 同様にベクトル $\mathbf{v}_2$ と等式の左辺の内積を取ると, $c_2 = 0$ になります. よって, (33) の右辺が成り立つことを示せました.

$$c_1 = c_2 = 0$$

8 ベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ に対して, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ ならば, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = 0$ なので下が成り立ちます.

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$$

斜辺の長さを $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ とするとピタゴラスの定理が成り立つことが確認できます.

9 ある点 P から直線上の任意の点 Q へのベクトル $\overrightarrow{PQ}$ を考えます. 直線上の点で点 P へのベクトルが直線と直交する点を R とします. このベクトル $\overrightarrow{RP}$ は直線上の点 Q から点 R へのベクトル $\overrightarrow{QR}$ と直交します. つまり, $\overrightarrow{RP} \perp \overrightarrow{QR}$ が成り立っているとします. 一般に練習問題 8 で証明したピタゴラスの定理より, $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ ならば, $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$ であるから以下が成立します.

$$|\overrightarrow{PQ}|^2 = |\overrightarrow{QR}|^2 + |\overrightarrow{RP}|^2$$

距離は非負であり, 特に $|\overrightarrow{QR}| \geq 0$ なので以下が成り立ちます.

$$|\overrightarrow{PQ}| \geq |\overrightarrow{RP}|$$

点 P は直線上の任意の点でしたので, 上の式は直線上のすべての点で成り立ちます. よって, $|\overrightarrow{RP}|$ は点 P から直線上の点の距離の最小値であることが分かります.

10 ベクトル $\mathbf{b}$ と $\mathbf{a}$ のなす角を θ とするとき内積と角度の関係より以下が成立します.

$$|v| = \left| \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a} \right| = \left| \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2} \right| |\mathbf{a}| = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|^2} |\mathbf{a}| = \frac{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| |\cos \theta|}{|\mathbf{a}|^2} |\mathbf{a}| = |\cos \theta| |\mathbf{b}|$$

練習問題 4

1

$$\begin{cases} ka = b \\ kc = d \end{cases} \dots\dots(\ast)$$

$a \neq 0, c \neq 0$ のとき上式より $k = \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \therefore ad - bc = 0$ が成り立つ. $a = 0$ のとき $b = 0$ なので, $0 \cdot d - 0 \cdot c = 0$ が成り立つ. $c = 0$ のとき $d = 0$ なので, $a \cdot 0 - b \cdot 0 = 0$ が成り立つ. よって $(\ast)$ のとき $ad - bc = 0$ が成り立つ.

2

公式 (2) や前の例 1 の解答より正射影ベクトル $\boldsymbol{v}$ は下になります.

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

よって, 正規直交基底の公式 (4) から下記がなり立ちます.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w} &= \boldsymbol{b} - \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) + 1 \cdot 0 + \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) = 0 \end{aligned}$$

よって, 下記が成り立ちます.

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

練習問題 5

1 コーシー・シュワルツの不等式 $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$ を証明しましょう。もし $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ ならば、両辺が 0 で成り立ちます。よって、 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ として証明します。(4) で与えられた次の正規直交分解を考えます。

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a} + \mathbf{w}$$

ただし、 $\mathbf{w}$ と $\mathbf{a}$ は直交しています。よって、ピタゴラスの定理を用いるとこの等式は下になります。

$$\begin{aligned} |\mathbf{b}|^2 &= \left| \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a} \right|^2 + |\mathbf{w}|^2 \\ |\mathbf{b}|^2 &= \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|^2}{|\mathbf{a}|^2} + |\mathbf{w}|^2 \\ |\mathbf{b}|^2 &\geq \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|^2}{|\mathbf{a}|^2} \end{aligned}$$

この不等号は $|\mathbf{w}|^2 \geq 0$ から成り立ちます。最後の式の両辺に $|\mathbf{a}|^2$ をかけます。

$$|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \geq |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|^2$$

正の平方根を取ると (5) が成り立ちます。

コーシー・シュワルツの不等式で等式が成り立つのは、上の不等号が等号のときです。それは $|\mathbf{w}|^2 = 0$ のときです。これは $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ と同値です。直交分解で垂直なベクトルがゼロベクトルということは $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ はお互いに他のスカラー倍になっていることです。

2 (5) のコーシー・シュワルツの不等式のベクトル表示 $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$ から和の表示に変えて、両辺を 2 乗すると下になります。

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)$$

ここですべての i について $b_i = 1$ とすると、 $\sum_{i=1}^n b_i^2 = 1$ から次式が求まります。

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n a_i^2$$

3 ベクトルの長さで表される斜辺 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ を考えます。

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \\ &= |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \\ &\leq |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \\ &= (|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|)^2 \end{aligned} \tag{34}$$

下から 2 番目の不等号 (34) はコーシー・シュワルツの不等式 (5) を用いています。最初と最後の式で正の平方根を取ると下の三角不等式が得られます。

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$$

三角不等式の等式が成り立つのは上の不等式 (34) が等式のときです。そのときは下記が成り立つときです。

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \tag{35}$$

これはどちらかのベクトルが他のベクトルの正のスカラー倍であれば成り立ちます。

反対に同式が成り立てば、コーシー・シュワルツの不等式 (5) より、どちらかが他方のスカラー倍になります。そのとき、(35) よりそのスカラーは正になります。

練習問題 6

- 1 行列 A と行列 B の第 2 列ベクトルの積は, C の第 2 列ベクトル $\mathbf{c}_2$ に等しくなります.

$$A\mathbf{b}_{\cdot 2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} = \mathbf{c}_2$$

- 2 行列 A の第 1 行ベクトルと行列 B の積は, C の第 1 行ベクトル $\mathbf{c}_1$ に等しくなります.

$$\mathbf{a}_{1\cdot}B = (a_{11} \ a_{12}) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} \ a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) = \mathbf{c}_1.$$

- 3 行列 A を行ベクトルの集まりとして捉えて, $\mathbf{b}_{\cdot j}$ の積を考えると下になります.

$$A\mathbf{b}_{\cdot j} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{1\cdot} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{m\cdot} \end{pmatrix} \mathbf{b}_{\cdot j} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{1\cdot}\mathbf{b}_{\cdot j} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{m\cdot}\mathbf{b}_{\cdot j} \end{pmatrix} = \mathbf{c}_{\cdot j}$$

- 4 行列 B を列ベクトルの集まりとして捉えて, $\mathbf{a}_{i\cdot}$ の積を考えると下になります.

$$\mathbf{a}_{i\cdot}B = \mathbf{a}_{i\cdot}(\mathbf{b}_{\cdot 1} \ \cdots \ \mathbf{b}_{\cdot p}) = (\mathbf{a}_{i\cdot}\mathbf{b}_{\cdot 1} \ \cdots \ \mathbf{a}_{i\cdot}\mathbf{b}_{\cdot p}) = \mathbf{c}_i.$$

- 5 練習 3 と練習 4 の解答より下が成り立ちます.

$$AB = (A\mathbf{b}_{\cdot 1} \ \cdots \ A\mathbf{b}_{\cdot p}) = (\mathbf{c}_{\cdot 1} \ \cdots \ \mathbf{c}_{\cdot p}) = C$$

$$AB = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{1\cdot}B \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{m\cdot}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{1\cdot} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_{m\cdot} \end{pmatrix} = C$$

- 6 行列の積の性質 (p.124) を 2×2 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ で証明してください.

$$(1) (AB)C = A(BC), \quad (2) (A+B)C = AC + BC, \quad A(B+C) = AB + AC,$$

$$(3) (kA)B = A(kB) = k(AB), \quad (4) AI = IA = A, \quad (5) AO = OA = O$$

$$(1) (AB)C = A(BC)$$

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \\ (AB)C &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})c_{11} + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})c_{21} & (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})c_{12} + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})c_{22} \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})c_{11} + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})c_{21} & (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})c_{12} + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})c_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}c_{11} + a_{12}b_{21}c_{11} + a_{11}b_{12}c_{21} + a_{12}b_{22}c_{21} & a_{11}b_{11}c_{12} + a_{12}b_{21}c_{12} + a_{11}b_{12}c_{22} + a_{12}b_{22}c_{22} \\ a_{21}b_{11}c_{11} + a_{22}b_{21}c_{11} + a_{21}b_{12}c_{21} + a_{22}b_{22}c_{21} & a_{21}b_{11}c_{12} + a_{22}b_{21}c_{12} + a_{21}b_{12}c_{22} + a_{22}b_{22}c_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

同様に,

$$\begin{aligned}
 BC &= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21} & b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22} \\ b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21} & b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22} \end{pmatrix} \\
 A(BC) &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21} & b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22} \\ b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21} & b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a_{11}(b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21}) + a_{12}(b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21}) & a_{11}(b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22}) + a_{12}(b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22}) \\ a_{21}(b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21}) + a_{22}(b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21}) & a_{21}(b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22}) + a_{22}(b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22}) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}c_{11} + a_{11}b_{12}c_{21} + a_{12}b_{21}c_{11} + a_{12}b_{22}c_{21} & a_{11}b_{11}c_{12} + a_{11}b_{12}c_{22} + a_{12}b_{21}c_{12} + a_{12}b_{22}c_{22} \\ a_{21}b_{11}c_{11} + a_{21}b_{12}c_{21} + a_{22}b_{21}c_{11} + a_{22}b_{22}c_{21} & a_{21}b_{11}c_{12} + a_{21}b_{12}c_{22} + a_{22}b_{21}c_{12} + a_{22}b_{22}c_{22} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

上記を比較すると $(AB)C$ と $A(BC)$ の各成分が一致する. よって $(AB)C = A(BC)$ が成り立つ.

$$(2) \cdot 1 \quad (A + B)C = AC + BC$$

$$\begin{aligned}
 A + B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} \\
 (A + B)C &= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} (a_{11} + b_{11})c_{11} + (a_{12} + b_{12})c_{21} & (a_{11} + b_{11})c_{12} + (a_{12} + b_{12})c_{22} \\ (a_{21} + b_{21})c_{11} + (a_{22} + b_{22})c_{21} & (a_{21} + b_{21})c_{12} + (a_{22} + b_{22})c_{22} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a_{11}c_{11} + b_{11}c_{11} + a_{12}c_{21} + b_{12}c_{21} & a_{11}c_{12} + b_{11}c_{12} + a_{12}c_{22} + b_{12}c_{22} \\ a_{21}c_{11} + b_{21}c_{11} + a_{22}c_{21} + b_{22}c_{21} & a_{21}c_{12} + b_{21}c_{12} + a_{22}c_{22} + b_{22}c_{22} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

一方 AC と BC を個別に計算する.

$$\begin{aligned}
 AC &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}c_{11} + a_{12}c_{21} & a_{11}c_{12} + a_{12}c_{22} \\ a_{21}c_{11} + a_{22}c_{21} & a_{21}c_{12} + a_{22}c_{22} \end{pmatrix} \\
 BC &= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21} & b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22} \\ b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21} & b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

これらを合計すると

$$AC + BC = \begin{pmatrix} a_{11}c_{11} + a_{12}c_{21} + b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21} & a_{11}c_{12} + a_{12}c_{22} + b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22} \\ a_{21}c_{11} + a_{22}c_{21} + b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21} & a_{21}c_{12} + a_{22}c_{22} + b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22} \end{pmatrix}$$

上記を比較すると $(A + B)C$ と $AC + BC$ の各成分が一致する. よって $(A + B)C = AC + BC$ が成り立つ.

$$(2) \cdot 2 \quad A(B + C) = AB + AC$$

$$\begin{aligned}
 B + C &= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} + c_{11} & b_{12} + c_{12} \\ b_{21} + c_{21} & b_{22} + c_{22} \end{pmatrix} \\
 A(B + C) &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} + c_{11} & b_{12} + c_{12} \\ b_{21} + c_{21} & b_{22} + c_{22} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a_{11}(b_{11} + c_{11}) + a_{12}(b_{21} + c_{21}) & a_{11}(b_{12} + c_{12}) + a_{12}(b_{22} + c_{22}) \\ a_{21}(b_{11} + c_{11}) + a_{22}(b_{21} + c_{21}) & a_{21}(b_{12} + c_{12}) + a_{22}(b_{22} + c_{22}) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{11}c_{11} + a_{12}b_{21} + a_{12}c_{21} & a_{11}b_{12} + a_{11}c_{12} + a_{12}b_{22} + a_{12}c_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{21}c_{11} + a_{22}b_{21} + a_{22}c_{21} & a_{21}b_{12} + a_{21}c_{12} + a_{22}b_{22} + a_{22}c_{22} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

一方 AB と AC を個別に計算する.

$$\begin{aligned}
 AB &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \\
 AC &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}c_{11} + a_{12}c_{21} & a_{11}c_{12} + a_{12}c_{22} \\ a_{21}c_{11} + a_{22}c_{21} & a_{21}c_{12} + a_{22}c_{22} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

これらを合計すると

$$\begin{aligned}
 AB + AC &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}c_{11} + a_{12}c_{21} & a_{11}c_{12} + a_{12}c_{22} \\ a_{21}c_{11} + a_{22}c_{21} & a_{21}c_{12} + a_{22}c_{22} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{11}c_{11} + a_{12}c_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{11}c_{12} + a_{12}c_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{21}c_{11} + a_{22}c_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{21}c_{12} + a_{22}c_{22} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

上記を比較すると $A(B+C)$ と $AB+AC$ の各成分が一致する．よって $A(B+C) = AB+AC$ が成り立つ．

(3) $(kA)B = A(kB) = k(AB)$ (3)・1 $(kA)B = k(AB)$ の証明

$$\begin{aligned} kA &= k \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix} \\ (kA)B &= \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11}b_{11} + ka_{12}b_{21} & ka_{11}b_{12} + ka_{12}b_{22} \\ ka_{21}b_{11} + ka_{22}b_{21} & ka_{21}b_{12} + ka_{22}b_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

一方

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \\ k(AB) &= k \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}) & k(a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) \\ k(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) & k(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ka_{11}b_{11} + ka_{12}b_{21} & ka_{11}b_{12} + ka_{12}b_{22} \\ ka_{21}b_{11} + ka_{22}b_{21} & ka_{21}b_{12} + ka_{22}b_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

上記を比較すると $(kA)B$ と $k(AB)$ の各成分が一致する．よって $(kA)B = k(AB)$ が成り立つ．

(3)・2 $A(kB) = k(AB)$ の証明

$$\begin{aligned} kB &= k \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kb_{11} & kb_{12} \\ kb_{21} & kb_{22} \end{pmatrix} \\ A(kB) &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} kb_{11} & kb_{12} \\ kb_{21} & kb_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(kb_{11}) + a_{12}(kb_{21}) & a_{11}(kb_{12}) + a_{12}(kb_{22}) \\ a_{21}(kb_{11}) + a_{22}(kb_{21}) & a_{21}(kb_{12}) + a_{22}(kb_{22}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} k(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}) & k(a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) \\ k(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) & k(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11}b_{11} + ka_{12}b_{21} & ka_{11}b_{12} + ka_{12}b_{22} \\ ka_{21}b_{11} + ka_{22}b_{21} & ka_{21}b_{12} + ka_{22}b_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

これが $k(AB)$ と一致する．よって $A(kB) = k(AB)$ が成り立つ．以上より $(kA)B = A(kB) = k(AB)$ が成り立つ．

(4) $AI = IA = A$ (4)・1 $AI = A$ の証明

$$AI = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot 1 + a_{12} \cdot 0 & a_{11} \cdot 0 + a_{12} \cdot 1 \\ a_{21} \cdot 1 + a_{22} \cdot 0 & a_{21} \cdot 0 + a_{22} \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = A$$

(4)・2 $IA = A$ の証明

$$IA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot a_{11} + 0 \cdot a_{21} & 1 \cdot a_{12} + 0 \cdot a_{22} \\ 0 \cdot a_{11} + 1 \cdot a_{21} & 0 \cdot a_{12} + 1 \cdot a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = A$$

以上より $AI = IA = A$ が成り立つ．

(5) $AO = OA = O$ (5)・1 $AO = O$ の証明

$$AO = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot 0 + a_{12} \cdot 0 & a_{11} \cdot 0 + a_{12} \cdot 0 \\ a_{21} \cdot 0 + a_{22} \cdot 0 & a_{21} \cdot 0 + a_{22} \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

(5)・2 $OA = O$ の証明

$$OA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot a_{11} + 0 \cdot a_{21} & 0 \cdot a_{12} + 0 \cdot a_{22} \\ 0 \cdot a_{11} + 0 \cdot a_{21} & 0 \cdot a_{12} + 0 \cdot a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

以上より $AO = OA = O$ が成り立つ．

7 実際に 2×2 行列で計算してみましょう．下の行列 A, B の積 AB を取ります．

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \\ AB &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot e + b \cdot g & a \cdot f + b \cdot h \\ c \cdot e + d \cdot g & c \cdot f + d \cdot h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} \end{aligned}$$

そして、その転置 $(AB)^\top$ は下になります。

$$(AB)^\top = \begin{pmatrix} ae + bg & ce + dg \\ af + bh & cf + dh \end{pmatrix}$$

転置行列 $A^\top, B^\top$ を求めその積 $B^\top A^\top$ を取ります。 $(AB)^\top$ に等しいですね。

$$\begin{aligned} A^\top &= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \quad B^\top = \begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix} \\ B^\top A^\top &= \begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \cdot a + g \cdot b & e \cdot c + g \cdot d \\ f \cdot a + h \cdot b & f \cdot c + h \cdot d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ea + gb & ec + gd \\ fa + hb & fc + hd \end{pmatrix} \end{aligned}$$

8 ある正方行列 A に関して $AX = I$ と $YA = I$ が成り立っているとする。

$$\begin{aligned} YAX &= YI \\ IX &= Y \\ \therefore X &= Y \end{aligned}$$

よって、逆行列が存在すればそれは唯一である。

9 $X = \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}$ が存在して、 $AX = I$ を満たすとする。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by & au + bv \\ cx + dy & cu + dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

この時、下記の等式が成り立つ。

$$\begin{cases} ax + by = 1 \\ cx + dy = 0 \end{cases} \quad (1) \quad \text{かつ} \quad \begin{cases} au + bv = 0 \\ cu + dv = 1 \end{cases} \quad (2)$$

(1) 式の上の式に d を掛け、下の式に b を掛け引くと

$$\begin{array}{r} adx + bdy = d \\ -) \quad bcx + bdy = 0 \\ \hline (ad - bc)x = d \dots\dots \textcircled{1} \end{array}$$

(2) 式に対しても同様に

$$\begin{array}{r} adu + bdv = 0 \\ -) \quad bcu + bdx = b \\ \hline (ad - bc)u = -b \dots\dots \textcircled{2} \end{array}$$

次に、(1) 式の下の式に a を掛け、上の式に c を掛け引くと

$$\begin{array}{r} acx + ady = 0 \\ -) \quad acx + bcy = c \\ \hline (ad - bc)y = -c \dots\dots \textcircled{3} \end{array}$$

(2) 式に対しても同様に

$$\begin{array}{r} acu + adv = a \\ -) \quad acu + bcv = 0 \\ \hline (ad - bc)v = a \dots\dots \textcircled{4} \end{array}$$

④ $ad - bc \neq 0$ のとき、①, ②, ③, ④ より

$$x = \frac{d}{ad - bc}, \quad y = \frac{-c}{ad - bc}, \quad u = \frac{-b}{ad - bc}, \quad v = \frac{a}{ad - bc}$$

ゆえに,

$$X = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

X をこのように定めると, 上の計算を逆にたどって $AX = I$ が成り立つ. また, 計算によって $XA = I$ も成り立つ. よって, X は A の逆行列である.

③ $ad - bc = 0$ のとき, ①, ②, ③, ④から, $a = b = c = d = 0$ となり, A はゼロ行列である. このとき, $AX = I$ はどんな X でも成り立たない.

よって, $ad - bc = 0$ のとき A の逆行列は存在しない.

10 異なるベクトル $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に同じベクトルを対応させます.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

行列 B の列ベクトルと図 8 の $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ が直交する意味は, 同次連立 1 次方程式 $1x + 2y = 0$, $2x + 4y = 0$ を内積で表現できるからです.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

11 対角行列の行列式は対角要素の積になることを示してください. 対角行列 D を下記とする.

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\det D$ の定義より, $\det D$ は対角成分の積 $a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$ を含んでいる. その他の積は置換の定義より, 必ず 1 つは非対角成分 a_{ij} ($i \neq j$) を含んでいる. 対角行列の定義より, そのような a_{ij} はゼロになるので, $a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$ 以外の積はすべてゼロである. よって, 下記が成り立つ.

$$\det D = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

練習問題 7

1

$$\begin{aligned}
g(x, y) &= |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} = ay - bx, & g(x', y') &= \begin{vmatrix} a & b \\ x' & y' \end{vmatrix} = ay' - bx' \\
g(x+x', y+y') &= \begin{vmatrix} a & b \\ x+x' & y+y' \end{vmatrix} = a(y+y') - b(x+x') = ay - bx + ay' - bx' \\
&= g(x, y) + g(x', y')
\end{aligned}$$

よって、加法性が成り立つ。次に、斉次性については、

$$g(cx, cy) = \begin{vmatrix} a & b \\ cx & cy \end{vmatrix} = acy - bcx = c(ay - bx) = cg(x, y)$$

となり、斉次性も成り立つ。ゆえに、 g は第 2 行ベクトルに関して線形性を有している。

2

$$\begin{aligned}
(1) \quad A_1 &= T_1 \tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 21 \\ 2 & 4 & 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 2 \cdot 1 + 0 \cdot 4 & 2 \cdot 21 + 0 \cdot 60 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 4 & 0 \cdot 21 + 1 \cdot 60 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 42 \\ 2 & 4 & 60 \end{pmatrix} \\
(2) \quad A_2 &= T_2 A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 42 \\ 2 & 4 & 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 & 1 \cdot 42 + 0 \cdot 60 \\ -1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 & -1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 & -1 \cdot 42 + 1 \cdot 60 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 42 \\ 0 & 2 & 18 \end{pmatrix} \\
(3) \quad A_3 &= T_3 A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 42 \\ 0 & 2 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 42 + 0 \cdot 18 \\ 0 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 0 & 0 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 & 0 \cdot 42 + \frac{1}{2} \cdot 18 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 42 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix} \\
(4) \quad A_4 &= T_4 A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 42 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 0 & 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 & 1 \cdot 42 + (-2) \cdot 9 \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 42 + 1 \cdot 9 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 24 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix} \\
(5) \quad \hat{A} &= T_5 A_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 24 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot 2 + 0 \cdot 0 & \frac{1}{2} \cdot 0 + 0 \cdot 1 & \frac{1}{2} \cdot 24 + 0 \cdot 9 \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 24 + 1 \cdot 9 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix} \\
(6) \quad T_2 T_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ -1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 & -1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\
T_3(T_2 T_1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-2) & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot (-2) & 0 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
T_4(T_3 T_2 T_1) &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) & 1 \cdot 0 + (-2) \cdot \frac{1}{2} \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) & 0 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
T_5(T_4 T_3 T_2 T_1) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot 4 + 0 \cdot (-1) & \frac{1}{2} \cdot (-1) + 0 \cdot \frac{1}{2} \\ 0 \cdot 4 + 1 \cdot (-1) & 0 \cdot (-1) + 1 \cdot \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&\text{よって,} \\
T_5 T_4 T_3 T_2 T_1 &= \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

3

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 20 \\ 2 & 2 & 52 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 20 \\ 2 & 2 & 52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 20 \\ 2 & 2 & 40 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 20 \\ 2 & 2 & 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4

まず、次の連立 1 次方程式を考える.

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

これを行列形式で表すと

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

拡大係数行列は

$$\begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \end{pmatrix}$$

となる. 行基本変形を用いて, 拡大係数行列を階段行列に変形する.

1. $a \neq 0$ のとき. (1) 第 1 行を a で割る.

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & \frac{e}{a} \\ c & d & f \end{pmatrix}$$

(2) 第 2 行から第 1 行の c 倍を引く.

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & \frac{e}{a} \\ 0 & d - \frac{bc}{a} & f - \frac{ec}{a} \end{pmatrix}$$

(3) 第 2 行を $d - \frac{bc}{a}$ で割る (ここで $d - \frac{bc}{a} \neq 0$).

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & \frac{e}{a} \\ 0 & 1 & \frac{f - \frac{ec}{a}}{d - \frac{bc}{a}} \end{pmatrix}$$

(4) 第 1 行から第 2 行の $\frac{b}{a}$ 倍を引く.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{e}{a} - \frac{b}{a} \cdot \frac{f - \frac{ec}{a}}{d - \frac{bc}{a}} \\ 0 & 1 & \frac{f - \frac{ec}{a}}{d - \frac{bc}{a}} \end{pmatrix}$$

(5) これを整理する.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{de - bf}{ad - bc} \\ 0 & 1 & \frac{af - ce}{ad - bc} \end{pmatrix}$$

したがって, 次のように解が求められる.

$$x = \frac{de - bf}{ad - bc}, \quad y = \frac{af - ce}{ad - bc}$$

2. $a = 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ のとき拡大係数行列は

$$\begin{pmatrix} 0 & b & e \\ c & d & f \end{pmatrix}$$

(1) 第 1 行と第 2 行を入れ替える.

$$\begin{pmatrix} c & d & f \\ 0 & b & e \end{pmatrix}$$

(2) 第 1 行を c で割る.

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{c} & \frac{f}{c} \\ 0 & b & e \end{pmatrix}$$

(3) 第 2 行を b で割る.

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{c} & \frac{f}{c} \\ 0 & 1 & \frac{e}{b} \end{pmatrix}$$

(4) 第 2 行に $\frac{d}{c}$ を掛け第 1 行から引く.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{f}{c} - \frac{de}{bc} \\ 0 & 1 & \frac{e}{b} \end{pmatrix}$$

(5) これを整理する.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{bf - de}{bc} \\ 0 & 1 & \frac{e}{b} \end{pmatrix}$$

したがって、次のように解が求められる.

$$x = \frac{bf - de}{bc}, \quad y = \frac{e}{b}$$

これは下記の解で,

$$x = \frac{de - bf}{ad - bc}, \quad y = \frac{af - ce}{ad - bc}$$

$a = 0$ のときと同じ解である. すなわち

$$x = \frac{de - bf}{-bc} = \frac{bf - de}{bc}, \quad y = \frac{-ce}{-bc} = \frac{e}{b}$$

3. $a = 0$, $c = 0$ のとき拡大係数行列は

$$\begin{pmatrix} 0 & b & e \\ 0 & d & f \end{pmatrix}$$

となり, x は任意の数でよく方程式は一意の解を持たない.

4. $a = 0$, $b = 0$ のとき拡大係数行列は

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & e \\ c & d & f \end{pmatrix}$$

となり, $e = 0$ と $cx + dy = f$ のときにしか解を持たない.

よって, $a \neq 0$ のとき, $d - \frac{bc}{a} \neq 0$ であり, $a = 0$ のとき, $b \neq 0$ かつ $c \neq 0$ となる. これらの条件は以下にまとめることができます.

$$ad - bc \neq 0$$

5 $A\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{b}$ と $A\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{b}$ が成り立っているとする.

$$A(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) = A\boldsymbol{x}_1 - A\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \mathbf{0}$$

よって, 仮定より

$$\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 = \mathbf{0}$$

$$\therefore \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2$$

よって, A は単射である.

練習問題 8

1 例 4 の解答を参考にして求めます。

$$\begin{aligned}
 z &= g'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + g(\mathbf{a}) = (4 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \quad 4 \cdot 1 + 2 \cdot 1) \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \\
 &+ 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1^2 = (6 \quad 6) \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} + 6 \\
 &= 6(x-1) + 6(y-1) + 6 = 6x + 6y - 6 \quad \therefore z = 6x + 6y - 6 \\
 \\
 z &= h'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + h(\mathbf{a}) = (2 \quad 3) \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \\
 &= (2 \quad 3) \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} + 5 = 2(x-1) + 3(y-1) + 5 = 2x + 3y \\
 \therefore z &= 2x + 3y
 \end{aligned}$$

2 例 4 の解答を参考にして求めます。

$$\begin{aligned}
 \nabla g &= g'(\mathbf{x})^\top = (4x + 2y \quad 2x + 4y)^\top = \begin{pmatrix} 4x + 2y \\ 2x + 4y \end{pmatrix} \\
 \nabla h &= h'(\mathbf{x})^\top = (2 \quad 3)^\top = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

3 (13) から例 4 の解答を元に $g_x(x, y) = 4x + 2y$, $g_y(x, y) = 2x + 4y$ から

$$\begin{aligned}
 D_{\mathbf{v}}g &= \nabla g \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4x + 2y \\ 2x + 4y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (4x + 2y)v_1 + (2x + 4y)v_2 \\
 &= (4v_1 + 2v_2)x + (2v_1 + 4v_2)y
 \end{aligned}$$

$h(x, y) = 2x + 3y$, $h_x(x, y) = 2$, $h_y(x, y) = 3$ から

$$D_{\mathbf{v}}h = \nabla h \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 2v_1 + 3v_2$$

練習問題 9

1 p.174 の (12) の $f(\mathbf{a} + h\mathbf{v})$ の $\mathbf{a} + h\mathbf{v}$ を $\mathbf{x}(h)$ に書き換える.

$$\mathbf{a} + h\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + hv_1 \\ b + hv_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(h) \\ y(h) \end{pmatrix} = \mathbf{x}(h)$$

よって, $f(\mathbf{a} + h\mathbf{v}) = f(\mathbf{x}(h))$ かつ $f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{x}(0))$ となる. また, 下が成り立つ.

$$\mathbf{x}'(h) = \mathbf{v}$$

p.174 の方向微分の定義 (12) は下書き換えられる.

$$\frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{h} = \frac{f(\mathbf{x}(h)) - f(\mathbf{x}(0))}{h} \quad (36)$$

合成関数 $g(h) = f(\mathbf{x}(h))$ を考えると, (36) から下が成り立つ.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{dg}{dh}(h) = D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) \quad (37)$$

$g(h)$ に連鎖律を適用すると

$$\frac{dg}{dh} = \nabla f \cdot \mathbf{x}' = \nabla f \cdot \mathbf{v}$$

よって, (37) から $h = 0$ で評価すると下が成り立つ.

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}$$

2 合成関数 $h = f \circ \mathbf{x}$ を考えて, それに連鎖律を適用すると

$$\frac{dh}{dt} = f' \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

ナブラと方向ベクトル $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ の内積で表現する.

$$\frac{dh}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \nabla f \cdot \mathbf{v}$$

よって, $\frac{dh}{dt}$ が最大になる方向は, $\nabla f \cdot \mathbf{v}$ が最大になることであることが分かります. 内積の議論から方向ベクトル $\mathbf{v}$ は ∇f と同じ方向を向いていることが分かります. そのとき $\mathbf{v}$ は正のスカラー c を用いて下に表される.

$$\mathbf{v}^* = c\nabla f$$

このとき, 下の式になり $\frac{dh}{dt}$ を最大化できます.

$$\frac{dh}{dt} = \nabla f \cdot \mathbf{v}^* = \nabla f \cdot (c\nabla f) = c|\nabla f|^2$$

これは $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_0 + at \\ y_0 + bt \end{pmatrix}$ がパラメータ t に従い関数値 $h(t)$ が最も大きくなる方向に動くときは

$$\mathbf{v}^* = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = c\nabla f$$

の方向を向いていることを意味します. 反対に ∇f は関数値が最大化する方向 $\mathbf{v}^*$ を向いている.

□3 (4) に $\mathbf{f}(t) = x(t)\mathbf{e}_1 + y(t)\mathbf{e}_2$ と $\mathbf{f}(t_0) = x(t_0)\mathbf{e}_1 + y(t_0)\mathbf{e}_2$ と $\mathbf{f}'(t_0) = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = A\mathbf{e}_1 + B\mathbf{e}_2$ を代入します.

$$\begin{aligned}
 \text{分子} &= |x(t)\mathbf{e}_1 + y(t)\mathbf{e}_2 - (x(t_0)\mathbf{e}_1 + y(t_0)\mathbf{e}_2) - (A\mathbf{e}_1 + B\mathbf{e}_2)(t - t_0)| \\
 &= |(x(t) - x(t_0) - A(t - t_0))\mathbf{e}_1 + (y(t) - y(t_0) - B(t - t_0))\mathbf{e}_2| \\
 \text{分数} &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{|(x(t) - x(t_0) - A(t - t_0))\mathbf{e}_1 + (y(t) - y(t_0) - B(t - t_0))\mathbf{e}_2|}{|t - t_0|} \\
 &= \left| \left(\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0) - A(t - t_0)}{|t - t_0|} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t) - y(t_0) - B(t - t_0)}{|t - t_0|} \right) \mathbf{e}_2 \right| \\
 &= |(x'(t_0) - A)\mathbf{e}_1 + (y'(t_0) - B)\mathbf{e}_2| = 0 \\
 \therefore \quad x'(t_0) - A = 0 \quad \text{かつ} \quad y'(t_0) - B = 0 \\
 \therefore \quad \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \mathbf{f}'(t_0)
 \end{aligned}$$

練習問題 10

1 ラグランジュ関数を定義する.

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = \sqrt{xy} + \lambda(c - (4x + y))$$

例 2 の解答の $y = 4x$ から

$$c - (4x + 4x) = 0 \iff c - 8x = 0 \iff x^* = \frac{c}{8}$$

となり, 制約式に代入すると

$$c - (4 \cdot \frac{c}{8} + y) = 0 \iff \frac{c}{2} - y = 0 \iff y^* = \frac{c}{2}$$

よって, $\mathbf{x}^* = \left(\frac{c}{8}, \frac{c}{2}\right)$ であり, 例 2 の $2\lambda = \sqrt{\frac{x}{y}}$ より, $\lambda = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\frac{c}{8}}{\frac{c}{2}}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$ となる.

2

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = 16 - x^2 - y^2 + \lambda(2 - x - y)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -2x - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -2y - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 2 - x - y = 0$$

1, 2 番目の式より

$$x = y = -\frac{\lambda}{2}$$

となる. 3 番目の式に代入して

$$2 - \left(-\frac{\lambda}{2}\right) - \left(-\frac{\lambda}{2}\right) = 0 \iff \lambda^* = -2$$

となる. よって

$$x^* = y^* = -\frac{-2}{2} = 1$$

解は $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ となり, 最適値は

$$f(\mathbf{x}^*) = 16 - 1^2 - 1^2 = 14$$

となる. $g(\mathbf{x}) = c$ からラグランジュアンは

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = 16 - x^2 - y^2 + \lambda(c - x - y)$$

各変数で偏微分して

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -2x - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -2y - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = c - x - y = 0$$

1, 2 番目の式より, 前の問題と同様に

$$x = y = -\frac{\lambda}{2}$$

$$c - \left(-\frac{\lambda}{2}\right) - \left(-\frac{\lambda}{2}\right) = 0 \iff \lambda^* = -c$$

となる. よって

$$x^* = y^* = -\frac{-c}{2} = \frac{c}{2}$$

よって, $\boldsymbol{x}^* = \begin{pmatrix} \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} \end{pmatrix}$ となる.

$$\begin{aligned} V(c) &= f(\boldsymbol{x}^*(c)) = 16 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 \\ &= 16 - \frac{c^2}{4} - \frac{c^2}{4} = 16 - \frac{c^2}{2} \\ \frac{dV}{dc} &= \left(16 - \frac{c^2}{2}\right)' = -c \end{aligned}$$

これは, $\lambda^* = -c$ と等しい.

練習問題 11

1 p.170 の例 3 の $f_x = \sqrt{x/y}/2$, $f_y = \sqrt{y/x}/2$ なのて,

$$\begin{aligned}
 f_{xx} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) x^{-\frac{3}{2}} y^{\frac{1}{2}} & f_{xy} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} \\
 &= -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} y^{\frac{1}{2}} & &= \frac{1}{4} x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} \\
 f_{yx} &= f_{xy} & f_{yy} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{3}{2}} \\
 & & &= -\frac{1}{4} x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{3}{2}}
 \end{aligned}$$

練習問題 12

1 (7) と比較するために $A^T \mathbf{x}$ を計算します.

$$A^T \mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

下記より表記の式は (9) に等しいことが分かります.

$$\begin{aligned} A^T \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= (a_{11}x_1 + a_{21}x_2)y_1 + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2)y_2 \\ &= a_{11}x_1y_1 + a_{21}x_2y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{22}x_2y_2 \end{aligned}$$

よってこの関係は下が成り立っていることを意味します.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

2

$$\begin{aligned} \mathbf{x}H\mathbf{x} &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ax + by \\ bx + dy \end{pmatrix} = x(ax + by) + y(bx + dy) \\ &= ax^2 + 2bxy + dy^2 \end{aligned}$$

$a \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned} &= a \left(x^2 + \frac{2b}{a}xy + \frac{d}{a}y^2 \right) = a \left(\left(x + \frac{b}{a}y \right)^2 - \frac{b^2}{a^2}y^2 + \frac{d}{a}y^2 \right) \\ &= a \left(\left(x + \frac{b}{a}y \right)^2 + \frac{ad - b^2}{a^2}y^2 \right) \end{aligned}$$

よって, すべての $\mathbf{x} \neq 0$ に対して下が成り立ちます.

$$\mathbf{x}H\mathbf{x} < 0 \iff a < 0, \quad ad - b^2 > 0$$

練習問題 13

[1] p.201 の例 3 より, $\mathcal{L}_x = 2(x - x_1) + \lambda a$, $\mathcal{L}_y = 2(y - y_1) + \lambda b$, $\mathcal{L}_\lambda = ax + by + c$ なので下
が成り立つ.

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y \partial x} = 0$$

さらに $g(x, y) = -(ax + by + c)$ より

$$\nabla g = \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix} \quad \nabla g^\top = (-a \quad -b) \quad \nabla^2 \mathcal{L} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

よって, 縁つきヘッセ行列は下になる.

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \nabla g^\top \\ \nabla g & \nabla^2 \mathcal{L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ -a & 2 & 0 \\ -b & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

サラスの公式より行列式が求まる.

$$\begin{aligned} \det H &= 0 \cdot (2 \cdot 2 - 0 \cdot 0) - (-a)((-a) \cdot 2 - 0 \cdot (-b)) + (-b)((-a) \cdot 0 - 2 \cdot (-b)) \\ &= 0 + a(-a \cdot 2 - (-b) \cdot 0) + (-b)(-a \cdot 0 - 2(-b)) \\ &= -2a^2 - 2b^2 = -2(a^2 + b^2) < 0 \end{aligned}$$

よって, $\det H(\mathbf{x}^*) < 0$ より $\mathbf{x}^*$ は最小点になる.

[2] $f(x, y) = \sqrt{xy}$ の定義域は $x \geq 0, y \geq 0$ の (x, y) で凸集合です. p.170 の例 3 より,
 $f_x = \sqrt{x/y}/2, f_y = \sqrt{y/x}/2$ なので, $x = 0$ や $y = 0$ で微分不可能です. また, 第 11 章の練習問
題 1 から

$$\begin{aligned} f_{xx} &= -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}} < 0 \\ H &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}} & -\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix} \\ \det H &= \left(-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}\right)\left(-\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{2}}\right) - \left(\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}\right)^2 \\ &= \frac{1}{16}x^{-1}y^{-1} - \frac{1}{16}x^{-1}y^{-1} = 0 \end{aligned}$$

よって, $f_{xx} < 0$ かつ $\det H = 0$ より, f は凹関数である.

練習問題 14

1 (8) を m で割ると次式が得られます.

$$b + a \frac{\sum_i x_i}{m} = \frac{\sum_i y_i}{m} \iff b + a\bar{x} = \bar{y} \iff b = \bar{y} - a\bar{x}$$

これで (11) の後半が証明されました. この式を (6) に代入します.

$$\begin{aligned} (\bar{y} - a\bar{x}) \sum_i x_i + a \sum_i x_i^2 &= \sum_i x_i y_i \\ a \left(\sum_i x_i^2 - \bar{x} \sum_i x_i \right) &= \sum_i x_i y_i - \bar{y} \sum_i x_i \end{aligned}$$

ここで $\sum_i x_i^2 - \bar{x} \sum_i x_i \neq 0$ のとき, a は下である.

$$a = \frac{\sum_i x_i y_i - \bar{y} \sum_i x_i}{\sum_i x_i^2 - \bar{x} \sum_i x_i} = \frac{\sum_i x_i y_i - m\bar{x}\bar{y}}{\sum_i x_i^2 - m\bar{x}^2} \quad (38)$$

次に, $m\bar{x} = \sum_i x_i$ などを用いて, x の分散と x と y の共分散を計算します.

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \frac{1}{m} \sum_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{m} \left(\sum_i x_i^2 - m\bar{x} \right) \\ m\sigma_x^2 &= \sum_i x_i^2 - m\bar{x} \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= \frac{1}{m} \sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{m} \left(\sum_i x_i y_i - m\bar{x}\bar{y} \right) \\ m\sigma_{xy} &= \sum_i x_i y_i - m\bar{x}\bar{y} \end{aligned} \quad (40)$$

(39) と (40) を (38) の右辺に代入すると a が求まる.

$$a = \frac{m\sigma_{xy}}{m\sigma_x^2} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$$

最初の仮定 $\sum_i x_i^2 - \bar{x} \sum_i x_i \neq 0$ は, すべての x_i が同じ値を取らないという仮定から満たされる.

2 $n = 2$ の単回帰のケースを考えます. X は $m \times 2$ 行列です.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$$

(22) の正規方程式 $X^\top X \hat{\beta} = X^\top \mathbf{y}$ より, $X^\top X$ は

$$X^\top X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & \sum_i x_i \\ \sum_i x_i & \sum_i x_i^2 \end{pmatrix}$$

対称な 2×2 行列になります. $X^\top \mathbf{y}$ は,

$$X^\top \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i y_i \\ \sum_i x_i y_i \end{pmatrix}$$

2 次列ベクトルになります. よって, (17) は

$$\begin{pmatrix} m & \sum_i x_i \\ \sum_i x_i & \sum_i x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i y_i \\ \sum_i x_i y_i \end{pmatrix}$$

となります。第1行と第2行はそれぞれ

$$mb + a \sum_i x_i = \sum_i y_i$$

$$b \sum_i x_i + a \sum_i x_i^2 = \sum_i x_i y_i$$

となり、正規方程式 (7) に等しくなります。

[3] 説明変数行列 X は正則、よって $m = n$ になります。そして、逆行列 X^{-1} が存在します。このとき $XX^{-1} = I$ という事実を用いて推定量の式 (21) を書き換えましょう。

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= (X^T X)^{-1} X^T \mathbf{y} = (X^T X)^{-1} X^T I \mathbf{y} = (X^T X)^{-1} (X^T X) X^{-1} \mathbf{y} = I X^{-1} \mathbf{y} \\ &= X^{-1} \mathbf{y}\end{aligned}$$

[4] 数式をもう一度表示します。

$$X = (\mathbf{1} \ \mathbf{x}) \quad \hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{b} \\ \hat{a} \end{pmatrix} \quad X\hat{\beta} = (\mathbf{1} \ \mathbf{x}) \begin{pmatrix} \hat{b} \\ \hat{a} \end{pmatrix} = \hat{b}\mathbf{1} + \hat{a}\mathbf{x}$$

よって、推計ベクトル $\hat{\mathbf{y}}$ は

$$\hat{\mathbf{y}} = \hat{b}\mathbf{1} + \hat{a}\mathbf{x} = X\hat{\beta}$$

となります。残差ベクトルと推計ベクトルの内積は下になる。

$$\boldsymbol{\epsilon} \cdot \hat{\mathbf{y}} = \boldsymbol{\epsilon} \cdot X\hat{\beta} = \boldsymbol{\epsilon}^T X\hat{\beta} = (\mathbf{y} - X\hat{\beta})^T X\hat{\beta}$$

p.144 の (2) の行列の転置の線形性から $(A - B)^T = A^T - B^T$ より

$$= (\mathbf{y}^T - (X\hat{\beta})^T) X\hat{\beta}$$

p.126 の (11) の $(AB)^T = B^T A^T$ より

$$= \mathbf{y}^T X\hat{\beta} - \hat{\beta}^T X^T X\hat{\beta}$$

正規方程式 (17) の $X^T X\hat{\beta} = X^T \mathbf{y}$ より

$$= \mathbf{y}^T X\hat{\beta} - \hat{\beta}^T X^T \mathbf{y}$$

p.126 の (10) の $(A^T)^T = A$ より

$$= \mathbf{y}^T X\hat{\beta} - \hat{\beta}^T X^T \mathbf{y}^T$$

p.126 の問い 3 より $(ABC)^T = C^T B^T A^T$ より

$$= \mathbf{y}^T X\hat{\beta} - \mathbf{y}^T X\hat{\beta} = 0$$

よって、 $\boldsymbol{\epsilon} \cdot \hat{\mathbf{y}} = 0$ が示された。

[5]

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad y = \frac{1}{2}x + 2$$

$$\frac{1}{2}\mathbf{x} + 2\mathbf{1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 3 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{y} - \left(\frac{1}{2}\mathbf{x} + 2\mathbf{1}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 3 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\epsilon} \cdot \left(\frac{1}{2}\mathbf{x} + 2\mathbf{1}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 3 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{5}{2} + 1 \cdot 3 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{7}{2} = -\frac{12}{4} + 3 = 0$$

6 説明変数行列と被説明変数ベクトルは,

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

となる。転置行列との積は,

$$\begin{aligned} X^{\top} X &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{\top} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。行列式は,

$$\det X^{\top} X = 3 \cdot 14 - 6 \cdot 6 = 42 - 36 = 6$$

なので、逆行列の公式より,

$$\begin{aligned} (X^{\top} X)^{-1} &= \frac{1}{\det X^{\top} X} \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{14}{6} & -1 \\ -1 & \frac{3}{6} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

さらに、公式のパーツに代入して

$$(X^{\top} X)^{-1} X^{\top} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

となり、よって正規方程式より最小 2 乗法推定量は下になる。

$$\boldsymbol{\beta} = (X^{\top} X)^{-1} X^{\top} \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$